

# **Моделирование динамического поведения конструкций из вязкоупругих материалов с помощью метода конечных элементов**

В.В.Мокеев

*Южно-Уральский государственный университет*

Рассматриваются колебания конструкции из вязкоупругих материалов. В работе описан метод обобщенных комплексных форм, позволяющий учесть реальное изменение вязкоупругих свойств в частотной области и неоднородность их распределения по конструкции. Метод не накладывает ограничений на число функций, описывающих вязкоупругие свойства материала. Возможности метода демонстрируются на задаче исследования влияния вязкоупругого коэффициента Пуассона на амплитуды вынужденных колебаний неоднородной вязкоупругой конструкции.

## **Введение**

Вязкоупругие материалы (полимеры, композиты, бетон и т.д.) находят широкое применение в промышленности. Неоднородность свойств и сложность структуры является причиной больших трудностей, с которыми связан анализ поведения конструкций из таких материалов. Эффективным средством решения подобных задач является метод конечных элементов.

В наиболее распространенных сегодня конечно-элементных программах (NASTRAN, ANSYS) для решения задач динамики вязкоупругих конструкций используются методы комплексных собственных значений, с помощью которых могут быть найдены только самые простые решения. В методах комплексных собственных значений решение задач динамики конструкций из вязкоупругих материалов сводится к нахождению собственных чисел и векторов, которые являются комплексными. Поскольку собственные векторы удовлетворяют условию ортогональности, разложение в ряд по комплексным формам приводит к несвязанным дифференциальным уравнениям. Недостатками данного подхода является то, что вязкоупругие свойства должны описываться либо моделью Фойхта, либо моделью Сорокина, т. е. модуль накопления вязкоупругих материалов должен быть постоянным по частоте, а модуль потерь либо линейно изменяться, либо быть постоянным по частоте. Однако реальные вязкоупругие материалы просто не обладают такими удобными характеристиками [1]. Кроме того, для описания свойств вязкоупругого материала используется одна функция, соответствующая модулю упругости в упругом решении, т.е. предполагается, что коэффициент Пуассона равен действительной константе.

В работе [2] предлагается метод решения задач динамики неоднородных конструкций, вязкоупругие свойства которых описываются одной функцией (комплексным модулем упругости). В данной работе этот метод развивается как метод обобщенных комплексных форм, который, сохраняя все прелести метода комплексных собственных значений, распространяется на случай, когда вязкоупругие свойства материала описываются несколькими функциями. В отличие от метода комплексных собственных значений, метод обобщенных комплексных форм позволяет учесть реальное изменение вязкоупругих характеристик в частотной области и неоднородность их распределения по конструкции. Обобщенные комплексные формы, в отличие от стандартных комплексных форм, являются расширенными, а количество дополнительных степеней свободы зависит от выбранной модели вязкоупругих свойств.

## Метод обобщенных комплексных форм

Рассматривается конструкция, состоящая из упругих и вязкоупругих деформируемых элементов. Если материал элемента упругий, то связь между напряжениями и деформациями для такого элемента устанавливается с помощью закона Гука. Для линейного вязкоупругого материала соотношения между напряжениями и деформациями всегда можно описать в форме, сходной с используемой в теории упругости

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^* \boldsymbol{\varepsilon} , \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – векторы напряжений и деформаций,  $\mathbf{D}^*$  – матрица вязкоупругих операторов. Для изотропного вязкоупругого тела матрица  $\mathbf{D}^*$  полностью определяется двумя вязкоупругими операторами, а для анизотропных материалов может потребоваться 21 оператор. Пусть матрица  $\mathbf{D}^*$  для вязкоупругого материала описывается  $p$  дифференциальными операторами. В этом случае она может быть представлена в виде

$$\mathbf{D}^* = H_1^* \mathbf{D}_1 + H_2^* \mathbf{D}_2 + \dots + H_p^* \mathbf{D}_p , \quad (2)$$

где  $H_j^*$  – дифференциальные операторы,  $\mathbf{D}_j$  – матрицы упругих констант. Полный вектор напряжений при этом можно разложить на составляющие

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \dots + \boldsymbol{\sigma}_p , \quad (3)$$

каждая из которых связана с полным вектором деформаций

$$\boldsymbol{\sigma}_j = H_j^* \mathbf{D}_j \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (4)$$

Дифференциальные операторы  $H_j^*$  будем описывать в виде

$$\frac{1}{H_j^*} = \frac{I}{a_{j1} + b_{j1} \frac{d}{dt}} + \frac{I}{a_{j2} + b_{j2} \frac{d}{dt}} + \dots + \frac{I}{a_{jm} + b_{jm} \frac{d}{dt}} . \quad (5)$$

Такое разложение позволяет представить полную деформацию  $\boldsymbol{\varepsilon}$  в виде суммы элементарных деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{j1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{j2} + \dots + \boldsymbol{\varepsilon}_{jm} , \quad (6)$$

каждая из которых связана с напряжением  $\boldsymbol{\sigma}_j$  соотношением вида

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ji} = \left[ \left( \mathbf{a}_{ji} + \mathbf{b}_{ji} \frac{d}{dt} \right) \mathbf{D}_j \right]^{-1} \boldsymbol{\sigma}_j . \quad (7)$$

Вектор узловых перемещений элемента можно также разложить на составляющие

$$\boldsymbol{\delta}^e = \boldsymbol{\delta}_{j1}^e + \boldsymbol{\delta}_{j2}^e + \dots + \boldsymbol{\delta}_{jm}^e , \quad (8)$$

каждая из которых связана с соответствующей элементарной деформацией соотношением

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}_{ij}^e . \quad (9)$$

Здесь  $\mathbf{B}$  – матрица деформаций. Перепишав функционал  $\chi$  с учетом (7), (8), (9) получим

$$\begin{aligned} C = & \left( \boldsymbol{\delta}^e \right)^T \left( \mathbf{a}_{1i} + \mathbf{b}_{1i} \frac{d}{dt} \right) \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B} dV \boldsymbol{\delta}_{1i}^e + \\ & \left( \boldsymbol{\delta}^e \right)^T \left( \mathbf{a}_{2k} + \mathbf{b}_{2k} \frac{d}{dt} \right) \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B} dV \boldsymbol{\delta}_{2k}^e + \dots + \\ & \left( \boldsymbol{\delta}^e \right)^T \left( \mathbf{a}_{pr} + \mathbf{b}_{pr} \frac{d}{dt} \right) \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B} dV \boldsymbol{\delta}_{pr}^e + \\ & \left( \boldsymbol{\delta}^e \right)^T \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \boldsymbol{\delta}^e + \left( \boldsymbol{\delta}^e \right)^T \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{p}^e dV \end{aligned} \quad (10)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad \dots \quad r = 1, 2, \dots, m).$$

Затем, после минимизации функционала по  $\delta^e$ , получим систему связанных матричных уравнений, описывающих динамическое поведение отдельного вязкоупругого конечного элемента.

$$\begin{aligned} & \mathbf{m}^e \ddot{\delta}^e + b_{1i} \mathbf{k}_1^e \dot{\delta}_{1i}^e + a_{1i} \mathbf{k}_1^e \delta_{1i}^e + \\ & + b_{2k} \mathbf{k}_2^e \dot{\delta}_{2k}^e + a_{2k} \mathbf{k}_2^e \delta_{2k}^e + \\ & + \dots + \\ & + b_{pr} \mathbf{k}_p^e \dot{\delta}_{pr}^e + a_{pr} \mathbf{k}_p^e \delta_{pr}^e = \mathbf{R}^e \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mathbf{k}_j^e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_j \mathbf{B} dV$ ,  $\mathbf{m}_j^e = \rho \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV$ .

Если добавить к полученным уравнениям соотношение (8), мы получим полную систему уравнений, которую удобно записывать в матричном виде

$$\mathbf{m}_s^e \ddot{\delta}_s^e + \mathbf{c}_s^e \dot{\delta}_s^e + \mathbf{k}_s^e \delta_s^e = \mathbf{R}_s^e. \quad (12)$$

Здесь  $\mathbf{m}_s^e$ ,  $\mathbf{c}_s^e$ ,  $\mathbf{k}_s^e$  – матрицы масс, вязкости и жесткости вязкоупругого конечного элемента, содержащие в качестве подматриц матрицы  $\mathbf{k}_j^e$  и  $\mathbf{m}^e$ ,  $\delta_s^e$  – вектор узловых перемещений вязкоупругого элемента, состоящий из векторов  $\delta^e$  и  $\delta_{jj}^e$ ,  $\mathbf{R}_s^e$  – вектор узловых реакций и внешних сил, действующих на вязкоупругий элемент. Структура и вид матриц вязкоупругого конечного элемента зависят от количества дифференциальных операторов, используемых для описания свойств вязкоупругого материала, и от количества членов ряда, которым представляется каждый дифференциальный оператор. Например, если вязкоупругие свойства описываются двумя дифференциальными операторами  $H_1^*$  и  $H_2^*$  вида

$$\frac{1}{H_j^*} = \frac{1}{a_{j1} + b_{j1} \frac{d}{dt}} + \frac{1}{a_{j2} + b_{j2} \frac{d}{dt}}, \quad (13)$$

то матрицы жесткости, вязкости и масс вязкоупругого конечного элемента будут иметь следующий вид

$$\mathbf{m}_s^e = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_s^e = \begin{bmatrix} b_{11} \mathbf{k}_1^e + b_{21} \mathbf{k}_2^e & -b_{11} \mathbf{k}_1^e & -b_{21} \mathbf{k}_2^e \\ -b_{11} \mathbf{k}_1^e & (b_{11} + b_{12}) \mathbf{k}_1^e & \mathbf{0} \\ -b_{21} \mathbf{k}_2^e & \mathbf{0} & (b_{21} + b_{22}) \mathbf{k}_2^e \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_s^e = \begin{bmatrix} a_{11} \mathbf{k}_1^e + a_{21} \mathbf{k}_2^e & -a_{11} \mathbf{k}_1^e & -a_{21} \mathbf{k}_2^e \\ -a_{11} \mathbf{k}_1^e & (a_{11} + a_{12}) \mathbf{k}_1^e & \mathbf{0} \\ -a_{21} \mathbf{k}_2^e & \mathbf{0} & (a_{21} + a_{22}) \mathbf{k}_2^e \end{bmatrix},$$

$$\delta_s^e = \begin{Bmatrix} \delta^e \\ \delta_{12}^e \\ \delta_{22}^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{R}_s^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^e \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}.$$

Формируя из матриц вязкоупругих и упругих конечных элементов глобальные матрицы жесткости, вязкости и масс, в итоге получим уравнение, описывающее поведение всей конструкции в целом

$$\mathbf{M}_s \ddot{\delta}_s + \mathbf{C}_s \dot{\delta}_s + \mathbf{K}_s \delta_s = \mathbf{F}_s, \quad (14)$$

где  $\mathbf{M}_s$ ,  $\mathbf{C}_s$ ,  $\mathbf{K}_s$  – глобальные матрицы масс, вязкости и жесткости вязкоупругой конструкции,  $\delta_s$  – вектор узловых перемещений вязкоупругой конструкции, составленный из векторов узловых перемещений упругих и вязкоупругих конечных элементов. Решение уравнения (14) ищется в виде линейной комбинации собственных векторов, полученных в результате решения задачи собственных значений уравнения

$$(\rho^2 \mathbf{M}_s + \rho \mathbf{C}_s + \mathbf{K}_s) \delta_0 = \mathbf{0}. \quad (15)$$

Это задача комплексных собственных значений и векторов. Корни матричного уравнения (15) делятся на действительные и комплексные. Комплексные собственные числа и векторы характеризуют динамические свойства вязкоупругой конструкции. Мнимая часть комплексного собственного значения численно равна частоте собственных колебаний, а действительная часть – коэффициенту затухания колебаний вязкоупругой конструкции. Решение уравнения (15) представляет большие трудности, в связи с большим порядком матриц. В работе [2] описан подход, позволяющий обойти эти трудности. В соответствии с ним характеристики вязкоупругих конечных элементов необходимо представлять в виде, когда матрицы жесткости и масс элементов моделируют накопление энергии, а матрица вязкости – потери энергии при вязкоупругих колебаниях. Это достигается путем приведения дифференциального оператора (5) в частотной области к виду  $\mathbf{H}_{1j}(\omega) + \mathbf{H}_{2j}(\omega)$ , т. е. к явному выделению действительной и мнимой частей. Такое преобразование возможно с помощью умножения числителя и знаменателя дифференциального оператора в частотной области на выражение, комплексно-сопряженное знаменателю. Например, дифференциальный оператор вида (13) после такого преобразования примет вид

$$\mathbf{H}_j^* = \frac{x_{j0} + x_{j1} \frac{d}{dt} + x_{j2} \frac{d^2}{dt^2} + x_{j3} \frac{d^3}{dt^3}}{1 + x_{j4} \frac{d^2}{dt^2}}, \quad (16)$$

где

$$x_{j0} = \frac{a_{j1} a_{j2}}{a_{j1} + a_{j2}}, \quad x_{j1} = \frac{b_{j1} a_{j2}^2 + b_{j2} a_{j1}^2}{a_{j1} + a_{j2}},$$

$$x_{j2} = \frac{a_{j1} b_{j2}^2 + a_{j2} b_{j1}^2}{a_{j1} + a_{j2}}, \quad x_{j4} = \frac{(b_{j1} + b_{j2})^2}{(a_{j1} + a_{j2})^2}.$$

Матрицы конечных элементов для операторов (16) записываются в виде

$$\mathbf{m}_s^e = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^e - \sum_j \frac{b_{j2}^2}{a_{j1} + a_{j2}} \mathbf{k}_j^e & -\frac{b_{12}(b_{11} + b_{12})}{a_{11} + a_{12}} \mathbf{k}_1^e & -\frac{b_{22}(b_{21} + b_{22})}{a_{21} + a_{22}} \mathbf{k}_2^e \\ -\frac{b_{12}(b_{11} + b_{12})}{a_{11} + a_{12}} \mathbf{k}_1^e & -\frac{(b_{11} + b_{12})^2}{a_{11} + a_{12}} \mathbf{k}_1^e & \mathbf{0} \\ -\frac{b_{22}(b_{21} + b_{22})}{a_{21} + a_{22}} \mathbf{k}_2^e & \mathbf{0} & -\frac{(b_{21} + b_{22})^2}{a_{21} + a_{22}} \mathbf{k}_2^e \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_s^e = \begin{bmatrix} \sum_j \frac{2 a_{j1} b_{j2}}{a_{j1} + a_{j2}} \mathbf{k}_j^e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{a_{12} b_{11} - b_{12} a_{11}}{a_{11} + a_{12}} \mathbf{k}_1^e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{a_{22} b_{21} - b_{22} a_{21}}{a_{21} + a_{22}} \mathbf{k}_2^e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_s^e = \begin{bmatrix} \sum_j a_{j2} \mathbf{k}_j^e & a_{12} \mathbf{k}_1^e & a_{22} \mathbf{k}_2^e \\ a_{12} \mathbf{k}_1^e & (a_{11} + a_{12}) \mathbf{k}_1^e & \mathbf{0} \\ a_{22} \mathbf{k}_2^e & \mathbf{0} & (a_{21} + a_{22}) \mathbf{k}_2^e \end{bmatrix},$$

$$\delta_s^e = \begin{Bmatrix} \delta^e \\ \delta_{p1}^e \\ \delta_{p2}^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{R}_s^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^e \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad \delta_{p1}^e = \delta_{12}^e - \delta^e, \quad \delta_{p2}^e = \delta_{22}^e - \delta^e.$$

Если для описания вязкоупругих свойств используются дифференциальные операторы в форме (16), то колебания вязкоупругой конструкции описываются уравнением с симметричными матрицами жесткости и масс и несимметричной матрицей вязкости. Несимметричность матрицы  $\mathbf{C}_S$  приводит к тому, что для каждого собственного значения  $p_i$  необходимо вычислять один правый  $\delta_{0i}^{\text{right}}$  и один левый  $\delta_{0i}^{\text{left}}$  собственные векторы. В этом случае решение уравнения (14) определяется по формуле

$$\delta_s = \sum_i \delta_{0i}^{\text{right}} q_i(t).$$

Здесь  $q_i(t)$  – коэффициенты пропорциональности, значение которых определяется из решения уравнения дифференциального уравнения с комплексными коэффициентами

$$\dot{q}_i - p_i q_i = (d_{0i}^{\text{left}})^T \mathbf{F}_s.$$

## Численный пример

В данном разделе метод обобщенных комплексных форм применяется для изучения влияния вязкоупругой функции, соответствующей коэффициенту Пуассона, на амплитуды вынужденных колебаний.

Рассматриваются колебания вязкоупругой конструкции, состоящей из упругой оболочки и вязкоупругого ребра (рис.1). Оболочка выполнена из стали и имеет толщину 0.001 м. Габариты конструкции не превышают 0.1 м, а масса составляет 0.1126 кг. Вязкоупругие свойства ребра описываются комплексным модулем и коэффициентом Пуассона.

Оболочка моделируется треугольными элементами, обладающими свойствами мембраны и жесткостью на изгиб, а вязкоупругое ребро – тетраэдрами. Полученная

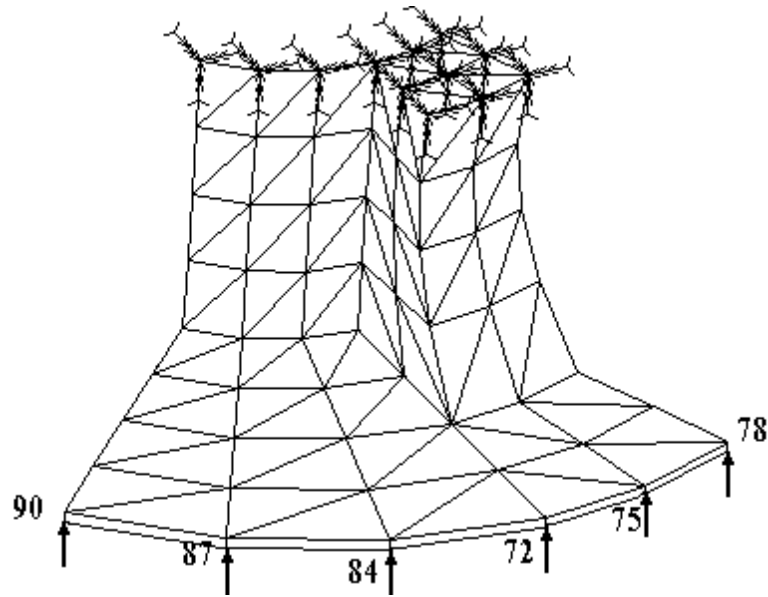


Рис.1. Конечно-элементная модель вязкоупругой конструкции

конечно-элементная модель показана на рис.1. Вязкоупругие свойства ребра аппроксимируются дифференциальными операторами в форме (16).

$E_1(\omega), E_2(\omega), \text{ МПа}$

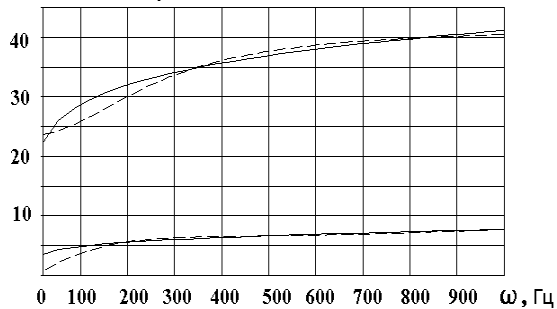


Рис. 2. Комплексный модуль вязкоупругого материала

$\nu_1(\omega)$

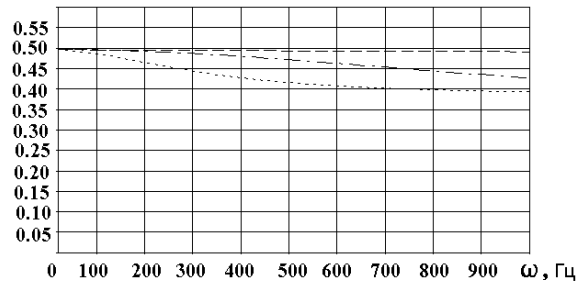


Рис.3. Коэффициент Пуассона вязкоупругого материала

Для достаточно достоверного описания вязкоупругого коэффициента Пуассона как функции от частоты колебаний в настоящее время нет достаточного количества данных. Поэтому, рассматриваются три возможных случая вязкоупругих свойств (а), (б) и (с). Каждый из вариантов вязкоупругих свойств описывается двумя функциями: комплексным модулем упругости (рис. 2), который для случаев (а), (б) и (с) принимается одинаковым, и комплексным коэффициентом Пуассона, который для каждого случая описывается своей функцией. На рис.2 показан комплексный модуль вязкоупругого материала (сплошная линия) и дифференциального оператора (штриховая линия). Вязкоупругий коэффициент Пуассона описывается для случая (а) малым, для случая (б) средним и для случая (с) большим изменением действительной части комплексного коэффициента Пуассона. Мнимая часть полагается пренебрежимо малой. На рис. 3 показано изменение действительной части коэффициента Пуассона для трех случаев

вязкоупругих свойств: случай (а) – штриховая линия, случай (б) – штрих пунктирная линия, и случай (с) – пунктирная линия. Вязкоупругая конечно-элементная модель имеет 660 степеней свободы, из них активными являются 558. Аналогичная упругая конечно-элементная модель содержит 396 степеней свободы (активных степеней свободы – 324).

Рассматриваются установившиеся колебания вязкоупругой конструкции под действием сил, изменяющихся во времени по закону  $\cos(\omega t)$  с амплитудой **0.1 Н**. Силы приложены к нижнему торцу оболочки. Исследуется зависимость амплитуд колебаний оболочки от частоты колебаний возмущающих сил. На рис. 4 представлены амплитудно-частотные характеристики ускорений 72 узла, полученные методом обобщенных комплексных форм для трех случаев вязкоупругих свойств: случай (а) (штриховая линия), случай (б) (штрих пунктирная линия) и случай (с) (пунктирная линия). На этом же рисунке для сравнения показана амплитудно-частотная характеристика, вычисленная при постоянном коэффициенте Пуассона (сплошная линия). Как можно видеть из рисунка, резонансные кривые смещены по сравнению с характеристикой, полученной для постоянного коэффициента Пуассона, в область более низких частот. Причем, смещение пиков увеличивается с ростом величины изменения коэффициента Пуассона (самое большое смещение – для случая (с)). Причина смещения резонансных пиков состоит в том, что повышение частоты колебания приводит к уменьшению объемного модуля  $E/(-2\nu)$ . Однако, небольшое изменение коэффициента Пуассона оказывает незначительное влияние на амплитуды АЧХ. Сравнение результатов показывает, что для случая (а) результаты достаточно хорошо согласуются с решением, полученным для случая постоянного коэффициента Пуассона.

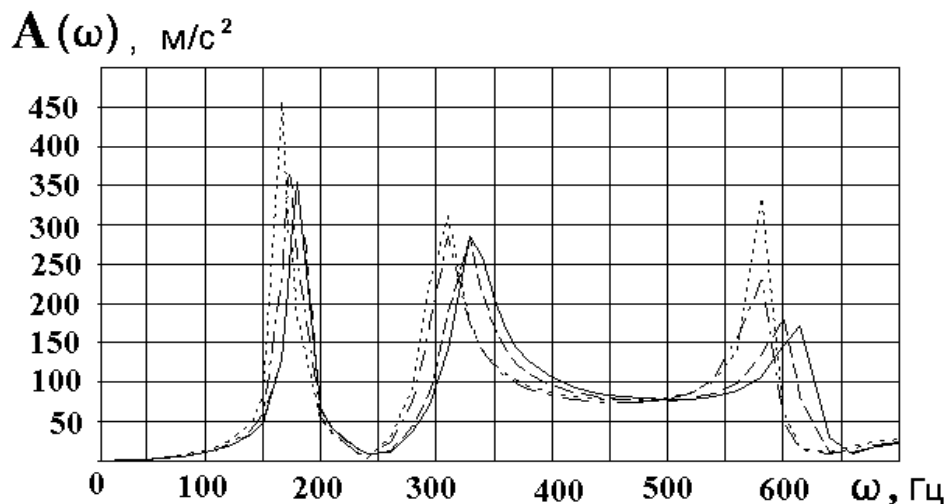


Рис.4. Амплитудно-частотные характеристики ускорений

Вторая задача направлена на вычисление амплитуд неустановившихся колебаний вязкоупругой конструкции, которая была исследована выше (рис.1). Конструкция нагружается сосредоточенной силой, изменение во времени которой описывается следующей формулой:

$$\begin{aligned} t \leq \tau, & \quad \text{то} & \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \sin(\pi t / \tau), \\ t > \tau, & \quad \text{то} & \quad \mathbf{F} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Параметры внешнего воздействия  $\tau=0.001$  с.,  $F_0=0.1$  Н.

В результате расчета неустановившихся колебаний оболочечной конструкции вычисляются зависимости ускорений различных узловых точек модели от времени. Полученные зависимости используются для вычисления ударных спектров. Ударный спектр, соответствующий временной зависимости ускорения  $\mathbf{a}(t)$ , представляет максимальное ускорение простого осциллятора в зависимости от его резонансной частоты при движении его основания с ускорением  $\mathbf{a}(t)$  [3]. В зависимости от величины демпфирования, допускаемого в осцилляторе, различаются демпфированные и не

демпфированные ударные спектры. Здесь под ударным спектром подразумевается демпфированный ударный спектр (декремент равен 0,3).

Исследуется влияние вязкоупругого коэффициента Пуассона на амплитуды вынужденных колебаний диска. Рассматриваются три случая вязкоупругих свойств (а) малое, (б) среднее и (с) большое изменение коэффициента Пуассона. Изменение действительной части комплексного коэффициента Пуассона для трех случаев вязкости показаны на рис. 3: случай (а) – штриховая линия, случай (б) – штрихпунктирная линия, случай (с) – пунктирная линия. Мнимая часть полагается пренебрежимо малой. На рис.5 показаны ударные спектры ускорений диска для 75 узловой точки, вычисленные методом обобщенных комплексных форм трех случаев вязкоупругих свойств: случай (а) (штриховая линия), случай (б) (штрих пунктирная линия) и случай (с) (пунктирная линия). На этом же рисунке для сравнения показан ударный спектр, вычисленный при постоянном коэффициенте Пуассона (сплошная линия).

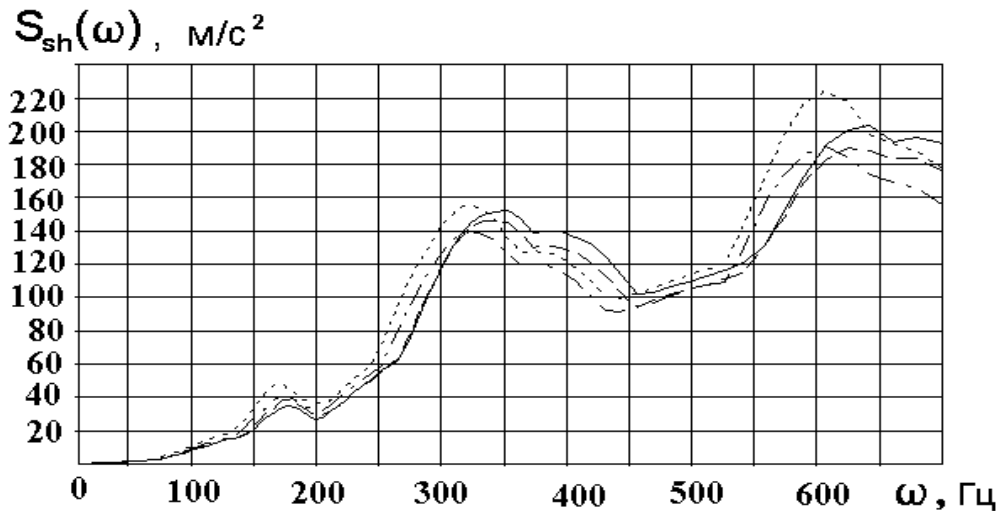


Рис. 5. Ударные спектры ускорений

Сравнение результатов показывает, что характер влияния вязкоупругого коэффициента Пуассона на амплитуды ударных спектров остается таким же, как и в задаче установившихся колебаний, хотя величина расхождений не такая значительная. Это объясняется тем, что здесь фактически сравниваются максимальные амплитуды вынужденных колебаний. Следует отметить, что представленные результаты исследования носят предварительный характер и требуют дальнейшего изучения.

## Заключение

Дано описание метода, использующего для моделирования вязкоупругих свойств дифференциальные операторы, а для решения уравнений – разложение по обобщенным комплексным формам. Метод позволяет учесть изменение вязкоупругих свойств в частотной области

Возможности метода проиллюстрированы на задачах исследования влияния вязкоупругого коэффициента Пуассона на амплитуды вынужденных колебаний конструкции при гармоническом и ударном нагружении.

## Литература

1. Nashif A. D., Johnes D., Henderson J. Vibration damping. John Wiley & Sons, Inc. 1985.– 448 p.



2. Гриненко Н.И., Мокеев В.В. Анализ динамики неоднородных вязкоупругих конструкций методом конечных элементов. // Механика композиционных материалов. N 3, 1989. С. 475-481.
3. Харрис С. М., Крид Ч. И. Справочник по ударным нагрузкам. Л.: Судостроение, 1980 - 360 с.