Метод частотной конденсации - эффективный подход в решении задач динамики конструкций

В.В. Мокеев, Е.Я. Фот

Челябинский государственный технический университет

1. Введение

Исследование современных проблем динамики и прочности сложных конструкций с помощью метода конечных элементов приводит к математическим моделям, которые описываются матричными уравнениями достаточно высоких порядков. Решение этих уравнений часто сводится к задаче нахождения собственных чисел и векторов. Известно, что решение этой задачи для плотных матриц небольшого размера является, в сущности, закрытой проблемой, однако, для матриц большого порядка задача на собственные значения оказывается далеко не тривиальной , и выбор оптимального метода ее решения совсем не прост.

В настоящее время можно выделить два основных направления решения проблемы собственных чисел больших матричных систем: итерационные методы и методы конденсации. К итерационным методам относятся методы, позволяющие находить собственные числа (векторы) с помощью какой-либо итерационной схемы и использующие такие свойства матриц, как симметричность и разряжённость. Матрицы обычно хранятся во внешней памяти в ленточной или блочно упакованной форме. Наиболее эффективными среди итерационных методов являются метод Ланцоша и метод итераций в подпространстве [1,2], получившие в настоящее время наибольшее распространение.

Методы конденсации базируются на предположении о зависимости одних (вспомогательных) переменных от других (основных), что позволяет исключить вспомогательные степени свободы. Методы конденсации являются приближенными, в том смысле, что собственные числа, рассчитанные по уравнениям с уменьшенным порядком, отличаются от собственных чисел исходного матричного уравнения. В настоящее время из методов конденсации наибольшей популярностью пользуется метод статической конденсации (метод Гайана), предложенный еще в 1965 году [3]. Основным недостатком метода является то, что выбор основных и вспомогательных степеней свободы в большинстве случаев ведётся на основе интуиции и опыта.

В статье обсуждается метод частотной конденсации, который является следующим логическим шагом развития методов конденсации. В отличии от метода Гайана , метод частотной конденсации решает задачу нахождения собственных чисел в заданном интервале. Выбор вспомогательных степеней свободы ведётся на основании анализа погрешности аппроксимаций, что превращает метод в сторогую, математическую процедуру.

2. Теоретические основы

Большинство задач динамического анализа сводятся к обобщенной проблеме собственных чисел вида

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right) \cdot \delta_0 = 0 \tag{1}$$

где **K**, **M** - матрицы жесткости и масс конструкции, ω^2, δ_0 собственные числа и векторы уравнения (1).

Разделим вектор δ_0 на две составляющие: вектор исключаемых степеней свободы и вектор удерживаемых степеней свободы. Уравнение (1) в соответствии с этим делением перепишем в виде

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{rs} \\ \mathbf{K}_{sr} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} - \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{rr} & \mathbf{M}_{rs} \\ \mathbf{M}_{sr} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{Bmatrix} \delta_r \\ \delta_s \end{Bmatrix} = 0, \qquad (2)$$

где индекс r относится к удерживаемым (основным) степеням свободы, а индекс s - к исключаемым (вспомогательным) степеням свободы. Связь между основными и вспомогательными степенями свободы, полученная из уравнения (2) имеет вид

$$\delta_s = \left(\mathbf{K}_{ss} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}_{ss}\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{K}_{sr} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}_{sr}\right) \cdot \delta_r \qquad (3)$$

После исключения вспомогательных степеней свободы с помощью соотношения (3) уравнение (2) имеет вид

$$\left(\mathbf{K}_{rr} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}_{rr} + \mathbf{D}_{rr}(\omega)\right) \cdot \delta_r = 0,$$

где $\mathbf{D}_{rr}(\omega) = -\left(\mathbf{K}_{rs} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}_{rs}\right) \cdot \left(\mathbf{K}_{ss} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}_{ss}\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{K}_{rs} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}_{rs}\right)^T$.

Понижение порядка матриц в методе частотной конденсации осуществляется путем аппроксимации матрицы преобразования $\mathbf{D}_{rr}(\omega)$ выражением вида

$$\mathbf{A}_{rr} = \mathbf{K}^*_{rr} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}^*_{rr}$$

Коэффициенты матриц $\mathbf{K}^*_{rr}$, $\mathbf{M}^*_{rr}$ определяются из условия наилучшего приближения матриц $\mathbf{D}_{rr}(\omega)$ и $\mathbf{A}_{rr}(\omega)$ в области диапазона частот $\omega_1 \ldots \omega_2$.

После понижения порядка матриц и решения редуцированного уравнения вычисляются векторы δ_s с помощью соотношения (3). При этом полученные векторы не являются взаимно ортогональными, поэтому требуется процедура ортогонализации.

В общем случае формула для вычисления погрешености аппроксимации матрицы $\mathbf{D}_{rr}(\omega)$ имеет вид

$$\mathbf{E}_{rr}(\omega) = \mathbf{D}_{rr}(\omega) - \mathbf{A}_{rr}(\omega).$$

На величину погрешности большое влияние оказывает выбор основных и вспомогательных степеней свободы. Неправильный выбор степеней свободы может привести к существенным погрешностям в собственных числах и векторах и даже к их потере. Матрица $\mathbf{D}_{rr}(\omega)$ и погрешность ее аппроксимации в значительной мере зависят от выбора основных и вспомогательных степеней свободы. Коэффициенты матрицы $\mathbf{D}_{rr}(\omega)$ изменяются по частоте и достигают бесконечности для ω^2 , равных собственным числам уравнения

$$\left(\mathbf{K}_{ss} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}_{ss}\right) \cdot \delta_s = 0. \qquad (5)$$

Соответственно и коэффициенты матрицы погрешности будут достигать бесконечности при таких ω^2. Поэтому, естественно, выбор вспомагательных степеней свободы должен быть таким, чтобы собственные числа уравнения (5) были как можно дальше удалены от искомых собственных чисел. Это является необходимым, но недостаточным условием при выборе вспомогательных степеней свободы. Уравнение (4) дает точные значения собственных чисел ω^2 и векторов δ_r. После понижения порядка матриц мы получим уравнение вида

$$\left(\mathbf{K}_{rr} + \mathbf{K}^*_{rr} - \omega^2 \cdot \left(\mathbf{M}_{rr} + \mathbf{M}^*_{rr}\right)\right) \delta^*_r = 0, \qquad (6)$$

которое дает приближеные значения ω^{*2} и δ_r^*. Для получения приближенной оценки погрешности собственных чисел вычтем из уравнения (4) уравнение (6), предполагая, что $\delta_r = \delta_r^*$. При этом получим

$$-\Delta\,\omega^2 \cdot \left(\mathbf{M}_{rr} + \mathbf{M}_{rr}^*\right) + \mathbf{E}_{rr}(\omega)\big) \cdot \delta_r = 0, \text{ где } \Delta\,\omega^2 = \omega^2 - \omega^{*2}.$$

Таким образом, приближенное значение погрешности, вносимое в собственные значения при понижении порядка матриц, определяется по формуле

$$\Delta\,\omega^2 \le \frac{\left\|\mathbf{E}_{rr}(\omega)\right\|}{\left\|\mathbf{M}_{rr} + \mathbf{M}_{rr}^*\right\|} \tag{7}$$

Условие (7) необходимо проверять для такой частоты ω^2 из интересующего диапазона собственных чисел, где погрешность максимальна. Например, при частотной конденсации в качестве $\omega^2{}_f$ используется $0{,}5 \cdot (\omega^2{}_1 - \omega^2{}_2)$. .

3. Алгоритм метода

Алгоритм метода частотной конденсации включает в себя пять этапов:

Э т а п 1 (конденсация). Осуществляется понижение порядка матриц уравнения (1).

Э т а п 2 (редуцированный базис). Вычисляются собственные значения и матрица собственных векторов редуцированного матричного уравнения:

Э т а п 3 (восстановление). Вычисляется полная матрица собственных векторов

$$\Delta = \left[\delta_{01} \quad \delta_{02} \quad \delta_{03} \quad \Lambda \quad \delta_{0\lambda}\right];$$

Э т а п 4 (приведение матриц). Вычисляются приведённые матрицы жёсткости и масс

$$\mathbf{K}_\lambda = \Delta^T \cdot K \cdot \Delta,\ \mathbf{M}_\lambda = \Delta^T \cdot \mathbf{M} \cdot \Delta;$$

Э т а п 5 (уточнение). Находится решение приведённого матричного уравнения $\left(\mathbf{K}_\lambda - \omega^2 \cdot \mathbf{M}_\lambda\right) \cdot \mathbf{q} = 0$ и формируется решение уравнения (1), которое включает собственные значения в интервале $\omega_1 ... \omega_2$ и собственные векторы, найденные по формуле $\delta_i = \Delta \cdot \mathbf{q}_i$.

Наиболее важной частью алгоритма является понижение порядка матриц, в основе которого лежит фронтальный подход. Главная особенность фронтального подхода состоит в том, что все операции выполняются в рамках заполненных, так называемых фронтальных матриц, которые увеличиваются, когда переменная появляется первый раз, и уменьшаются, когда переменная исключается.

При выборе вспомогательных переменных можно выделить два способа анализа погрешности :

1. оценка погрешности с использованием нормы матрицы погрешности. Такой способ требует формирования матрицы погрешности.

2. оценка погрешности с использованием следа матрицы погрешности. Описание алгоритма, использующего второй способ анализа погрешности, можно найти в работе [4] . Такой алгоритм не требует формирования полной матрицы погрешности.

3. Надёжность, точность и эффективность метода

Теперь рассмотрим метод частной конденсации с точки зрения того, в какой мере он удовлетворяет таким требованиям, как надежность, точность, эффективность.

Во-первых, метод должен быть надежным, т.е. должна быть известной степени гарантия того, что метод всё же выдаст какое-то решение. Таким образом, когда мы говорим о надежности метода, то, как правило, имеем в виду область определения метода, т.е. множество матриц, для которых метод работает. Метод Ланцоша и метод итераций в подпространстве требуют положительной определенности хотя бы одной из матриц. Это, естественно, сужает область применения метода в основном до области задач упругих конструкций. Незакрепленность конструкции порождает сингулярность матрицы жесткости, которая в свою очередь провоцирует сбои в работе метода итераций в подпространстве. Для того, чтобы избежать этой ситуации применяются специальные приёмы корректировки матрицы жёсткости, в частности, сдвиг исследуемого частотного диапазона либо добавление к диагональным элементам матрицы жесткости малых чисел.

Метод частотной конденсации обладает более высокой надежностью, чем указанные выше итерационные методы, так как не накладывает никаких ограничений на матрицы, кроме их симметричности. Метод успешно работает с матрицами, полученными при конечноэлементной дискретизации как упругих конструкций , так и конструкций с жидкостью и газом.

Рассматривается точность метода частотной конденсации. Для оценки точности вычисленных собственных значений и векторов предлагается использовать критерий

$$\chi = \frac{\left\|\left(\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}\right) \cdot \delta_{\mathrm{i}}\right\|}{\left\|\mathbf{K} \cdot \delta_i\right\|}.$$

Критерий представляет отношение нормы невязки уравнения (1) к норме упругих сил и характеризует степень приближения ω_i^2, δ_i к соответствующим точным значениям.

Так как собственные векторы обычно являются промежуточным продуктом, и используются чаще всего для расчета вынужденных колебаний модальным методом , ниже предлагаются исследования влияния точности вычисления собственных чисел и векторов на точность решения задачи вынужденных колебаний.

Исследования точности проводились на задачах о вынужденных колебаниях балок и оболочек, испытывающих ударное нагружение. Конечноэлементные модели таких конструкций имели от 150 до 2500 степеней свободы. Внешнее нагружение представляло либо сосредоточенную, либо распределенную нагрузку, действующую кратковременно. Результаты вычислений были получены в виде ударных спектров. В качестве точного выбиралось решение, полученное с использованием собственных частот и форм, имеющих критерий χ<0,00001. Обработка полученных результатов заключалась в определении для каждого проведенного расчета максимальной величины χ для найденного набора собственных чисел и векторов и максимальной ошибки в амплитудах ударных спектров, полученных с помощью этого набора. Результаты обработки представлены графически на рис. 1 в виде точек и аппроксимированы прямой линией.

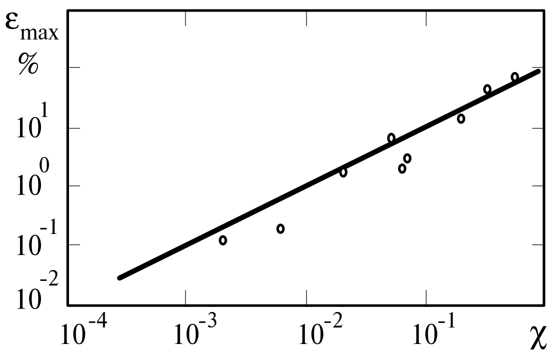

Рис. 1.

Быстрота исполнения является одним из традиционных критериев сравнения двух методов, каждый из которых надежен. Анализ быстродействия метода чаще всего осуществляется путем сравнения времени решения конкретных задач, полученных различными методами. В работе [4] было проведено сопоставление метода частотной конденсации с методом итераций в подпространстве путем такого сравнения. Однако, задачи решались на разных компьютерах , такое сравнение не всегда корректно. Ниже приводятся результаты решения двух задач , полученых на одном и том же компьютере. Под временем расчета понимается календарное время решения задачи. Все расчеты проведены на ЭВМ типа AT-DX4 (60 MHz) .

Рассматриваются собственные колебания консольной балки, смоделированной 201 конечным элементом и имеющей 1200 степеней свободы. Определялось время расчета, требуемое для вычисления 10, 20 и 30 собственных частот и форм методами итераций в подпространстве, реализованном в пакете прикладных программ ANSYS 5.0 и методом частотной конденсации, запрограммированном в конечноэлементном пакете DYAS 3.0. Объектом анализа второго примера являлась пологая сферическая оболочка, конечноэлементная модель которой имела 128 элементов и 486 степеней свободы. Граничные условия на оболочку не накладывались. Расчеты производились также для 10, 20 и 30 собственных чисел, результаты которых приведены в таблице 1.

Таблица 1

Модель	Степени свободы	Количество частот	Время расчета , с.	
			Итерации в подпространстве	Частотная конденсация
		10	73	43
Балка	1200	20	95	62
		30	115	78
Пологая		10	100	65
оболочка	486	20	150	112
		30	205	132

Данные, приведенные в таблице 1, показывают хорошее согласование по времени, затрачиваемому на аналогичные расчеты обоих упомянутых методов. Сравнение результатов показывает, что метод частотной конденсации по быстродействию не уступает итерационным методам.

5. Выводы

Для решения проблемы собственных чисел больших матричных систем предлагается использовать метод частотной конденсации. Анализ метода показывает, что по точности и эффективности он не уступает таким итерационным методам, как метод итераций в подпространстве и метод Ланцоша, а по надежности - превосходит их.

Для повышения эффективности метода частотной конденсации необходимы теоретические исследования математических схем и алгоритмов частотной

конденсации с полным построением матрицы погрешностей и выбором вспомогательных степеней свободы на основе анализа нормы матрицы порешности.

Литература

1. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы . - Москва, Мир, 1983. - 384 с.
2. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. - Москва, Стройиздат, 1982. -448 с.
3. Гайан Р.Д. Приведение матриц жесткости и масс. // Ракетная техника и космонавтика. 1965. - № 2. - С. 287-289.
4. Мокеев В.В. О задаче нахождения собственных значений и векторов больших матричных систем. // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. Т. 32, N 10, 1992. С. 1652-1657.