Колебания упругих систем с акустическими средами

В.В. Мокеев

Челябинский государственный технический университет

1. Основные уравнения

Рассмотрим акустическую систему, состоящую из упругой оболочки и акустической среды. Для акустической среды принимаются следующие допущения: возмущения среды малые средняя скорость потока равна нулю. При этом дифференциальное уравнение, описывающее распределение давления P акустической среды запишется в виде

$$\nabla^2 P - {}^{1}\!/_{c^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

где c - скорость звука, t - время. На границе акустической среды с упругой оболочкой задается условие

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \cdot \frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} \tag{2}$$

где U_n - нормальная составляющая перемещения оболочки, ρ - плотность акустической среды.

Для решения этого уравнения разобьем акустическую среды на элементы, для каждого из которых

$$P = \left[N_i, N_j, \ldots\right] \cdot \begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}^e$$

где **P**- вектор значений акустического давления в узловых точках конечного элемента, **N** - матрица функций формы.

Используя метод взвешенных невязок, получаем уравнение

$$\int_V \mathbf{N}^T \cdot \left(\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right) \cdot dV = 0.$$

От подынтегральной функции требуется непрерывный переход по границам между элементами с тем, чтобы второй дифференциал был ограниченным. Если мы хотим избежать этого ограничения, можно использовать интегрирование по частям. После чего получаем

$$\int_V \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \cdot \mathbf{N}^T \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right) \cdot dV -$$
$$- \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot l_x + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot l_y + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot l_z \right) \cdot dS = 0,$$

где l_x, l_y, l_z,- косинусы углов между внешней нормалью к поверхности и осями x,y,z. Первый интеграл не содержит вкладов от границ между элементами, если функция непрерывна. Используя соотношение (3) вклад каждого элемента в интеграл (4) можно записать в виде

$$\mathbf{h}^e \cdot \mathbf{p}^e + \mathbf{g}^e \cdot \ddot{\mathbf{p}}^e - \int_S \rho \cdot \mathbf{N}^T \cdot \frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} \cdot dS = 0, \tag{5}$$

где $\mathbf{h}^e = \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{N}^{\mathrm{T}}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}^{\mathrm{T}}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{N}^{\mathrm{T}}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \right) \cdot dV$, $\mathbf{g}^e = \frac{1}{c^2} \cdot \int_V \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \cdot dV$.

После суммирования вкладов всех элементов получим систему уравнений, аналогичную (5) за исключением того что добавляется поверхностный интеграл. Ясно, что этот интеграл не дает вклада в уравнения для внутренних точек. Движение границы акустической среды обусловлено перемещением оболочки. Если дискретизируется сама оболочка, то перемещения границы акустической среды можно представить в виде

$$U = \left[\overline{N}_i \quad \overline{N}_j \quad \Lambda \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ \mathrm{M} \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{U}_s^e \quad , \qquad \mathbf{U}_n = \mathbf{N} \cdot \lambda \cdot \mathbf{U}_s^e ,$$

где λ - матрица направляющих косинусов при переходе от U_n к U, U_s^e - вектор узловых перемещений конечного элемента оболочки. Таким образом уравнение движения акустической среды будет иметь вид

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{G} \cdot \ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{F}_p = 0, \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{F}_p$ получается путем суммирования f_p^e всех элементов, образующих границу акустической среды:

$$\mathbf{F}_p = \left(\int_S \rho \cdot \mathbf{N}^T \cdot \overline{\mathbf{N}} \cdot dS \right) \cdot \lambda \cdot \ddot{\mathbf{U}}_s = \mathbf{L} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_s \quad \text{где} \quad \mathbf{L} = \left(\int_S \rho \cdot \mathbf{N}^T \cdot \overline{\mathbf{N}} \cdot dS \right) \cdot \lambda.$$

Уравнения движения оболочки после ее дискретизации имеют вид

$$\mathbf{M}_s \cdot \ddot{\mathbf{U}}_s + C_s \cdot \dot{\mathbf{U}}_s + \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{U}_s + \mathbf{F}_a = \mathbf{F}_s \tag{7}$$

где $\mathbf{K}_s$, $\mathbf{C}_s$, $\mathbf{M}_s$ - матрицы жесткости, вязкости и масс, $\mathbf{U}_s$- вектор узловых перемещений оболочки. Воздействия на оболочку разделены на заданные внешние силы $\mathbf{F}_p$ и силы, обусловленные давлением акустической среды $\mathbf{F}_a$. На основание принципа виртуальных работ можно найти, что силы $\mathbf{F}_a$ должны быть заданы в виде $\mathbf{F}_a = \mathbf{L}^T \cdot \ddot{\mathbf{P}}_a$ Объединяя уравнения (6) и (7) получим связанную систему матричных уравнений, описывающих систему "акустическая среда- упругая оболочка".

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{L}^T \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_s \\ \dot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ \mathbf{L} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_s \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

Полученная система матричных уравнений является несимметричной. Для получения симметричной системы, используется уравнение для потенциала смещений

$$\ddot{\gamma} = -\frac{1}{\rho} P \tag{9}$$

С учетом (9) систему (8) можно переписать в виде

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\delta} + \mathbf{C} \cdot \dot{\delta} + \mathbf{K} \cdot \delta = \mathbf{F} \,, \qquad (10)$$

$$\text{где } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{L} & 0 \\ \mathbf{L}^T & -\mathbf{H} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho}\cdot\mathbf{Q} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_S \\ \gamma \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_S \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2. Метод решения

Решение уравнения (10) ищется в виде линейной комбинации собственных векторов, полученных в результате решения задачи собственных значений уравнения

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right)\cdot\delta_0 = 0. \tag{11}$$

Для определения собственных чисел и векторов уравнения (11) используется метод частотной конденсации [3] . Он включает пять этапов:
1. понижение порядка матриц уравнеия (11);
2. определение собственных чисел и векторов редуцированного матричного уравнения;
3. восстановление матрицы собственных векторов до полной:

$$\Delta = \left[\delta_{01} \quad \delta_{02} \quad \delta_{03} \quad \mathrm{K} \quad \delta_{0\lambda}\right]$$

4. вычисление приведенных матриц жесткости и масс

$$\mathbf{K}_\lambda = \Delta^T\cdot\mathbf{K}\cdot\Delta, \qquad \mathbf{M}_\lambda = \Delta^T\cdot\mathbf{M}\cdot\Delta;$$

5. решение приведенного матричного уравнения

$$\left(\mathbf{K}_\lambda - \omega^2\cdot\mathbf{M}_\lambda\right)\cdot\mathbf{q} = 0.$$

и уточнение собственных чисел и векторов $\delta_i = \Delta\cdot\mathbf{q}_i$.

При понижении порядка матриц компоненты вектора γ- исключаются по схеме Гаусса, а компоненты векторов $\mathbf{U}_S$, $\mathbf{P}$ - по схеме частотной конденсации, описанной в работе [3] . Исключение компонент γ по схеме Гаусса для акустических объемов приводит к "делению на нуль", так как матрица $\mathbf{H}$ является вырожденной. Для преодоления этой проблемы используется прием добавления к "нулю" числа, равного ($10^{-6}...10^{-8}$) значения диагонального элемента, который превращается в нуль. В этой схеме вычисления для повышения устойчивости вычислительного процесса предусматривается масштабирование элементов матриц.

3. Численные примеры.

Достоверность решений получаемых описанным подходом для акустических систем демонстрируется на примерах расчета собственных частот и форм следующих акустических полостей: 1) кольцо; 2) диск; 3) идеальная осесимметричная полость; 4) полость осесимметричного типа; 5) цилиндрическая оболочка с жидкостью.

В 1,2,3,4 случаях стенки акустических полостей являются абсолютно жесткими, а для случая 5 - упругими. Для первых трех примеров известны аналитические решения для собственных частот [1], которые будут использоваться для проверки достоверности описанного метода. Для полости четвертого типа результаты сравниваются с экспериментальными данными [2] Все собственные частоты определяются для воздуха при комнатной температуре и, следовательно, для скорости звука 344.42 м/с. Формы собственных колебаний, соответствующие найденным собственным частотам, обозначаются индексами i,m,n, которые числено равны числу волн в продольном, окружном и радиальном направлениях цилиндрической системы координат. В пятом примере рассматриваются осесимметричные колебаний цилиндрической оболочки с плоским дном, полностью заполненной водой.

1. Рассматриваются собственные колебания акустической полости в виде кольца. Внутренний и внешний радиусы кольца, образующие полость, составляют соответственно 0.0508м и 0.01016м, толщина - 0.0254м. Акустическая полость моделировалась 100 осесимметричными элементами акустической среды с треугольным поперечным сечением. Число степеней свободы конечноэлементной модели 132.

В таблице 1 частоты собственных колебаний, полученные с помощью описанного метода, реализованного в пакете ДИАС-3.0, сравниваются с аналитическим решением работы [1]

Таблица 1

Номер тона	Индекс числа волн собственных форм	Собственные частоты, Гц	
		ДИАС-3.0	Работа [1]
1	(0,1,0)	727	731
2	(0,2,0)	1442	1447
3	(0,3,0)	2131	2135
4	(0,4,0)	2796	2792
5	(0,5,0)	3417	3369

2. Рассматриваются собственные колебания акустической полости в виде диска. Полость в виде диска имеет радиус 0.1016м , толщина - 0.0254м. Акустическая полость моделировалась 130 осесимметричными элементами акустической среды с треугольным поперечным сечением. Число степеней свободы конечноэлементной модели 168. В таблице 2 частоты собственных колебаний, полученные с помощью описанного метода, реализованного в пакете ДИАС-3.0, сравниваются с аналитическим решением работы [1].

Таблица 2

Номер тона	Индекс числа волн собственных форм	Собственные частоты, Гц	
		ДИАС-3.0	Работа [1]
1	(0,1,0)	998	993
2	(0,2,0)	1628	1648
3	(0,0,1)	2046	2067

3. Рассматриваются собственные колебания акустической полости, имеющей форму цилиндра. Полость имеет внутренний радиус 0.09049м, внешний радиус 0.11906м и длину 0.29845м. Акустическая полость моделировалась 90 осесимметричными элементами акустической среды с треугольным поперечным сечением. Число степеней свободы конечноэлементной модели 128.

В таблице 3 частоты собственных колебаний, полученные с помощью описанного метода, реализованного в пакете ДИАС-3.0, сравниваются с аналитическим решением работы [1].

Таблица 3

Номер тона	Индекс числа волн собственных форм	Собственные частоты, Гц	
		ДИАС-3.0	Работа [1]
1	(0,1,0)	524	525
2	(1,0,0)	578	577
3	(1,1,0)	780	780
4	(0,2,0)	1049	1050
5	(2,0,0)	1162	1154

4. Рассматриваются собственные колебания акустической полости, внешняя поверхность которой представляет собой замкнутый цилиндр с радиусом 0.1191м и длиной 0.2985м, а внутренняя - цилиндр с радиусом 0.0905м и длиной 0.22866м. Акустическая полость моделировалась 126 осесимметричными элементами акустической

среды с треугольным поперечным сечением. Число степеней свободы конечно-элементной модели 168.

В таблице 4 частоты собственных колебаний, полученные с помощью описанного метода, реализованного в пакете ДИАС-3.0, сравниваются с экспериментальными результатами работы [2].

Таблица 4

Номер тона	Индекс числа волн собственных форм	Собственные частоты, Гц	
		ДИАС-3.0	Эксперимент [4]
1	(0,1,0)	479	487
2	(0,2,0)	587	600
3	(0,3,0)	866	903
4	(2,0,0)	1077	1124
5	(0,2,0)	1079	1143
6	(2,1,0)	1265	1347
7	(1,2,0)	1324	1432

5. Рассматриваются осесимметричные колебаний цилиндрической оболочки с плоским дном, полностью заполненной водой. Нижний край оболочки защемлен по углу поворота и свободен по радиальному смещению, верхний край свободно оперт. Параметры оболочки: радиус 1 м, толщина 0,01 м, модуль упругости 70 ГПа, коэффициент Пуассона 0,3, плотность материала 2700 кг/м^3. В таблице 5 приведены низшие частоты оболочки с жидкостью, полученные при различных отношения H/R . В первой строке таблице представлены собственные частоты, вычисленные для модели несжимаемой жидкости, а во второй - частоты полученные с учетом сжимаемости жидкости. а. Результаты получены с помощью вычислительного комплекса ДИАС 3.0. Для сравнения приведены результаты расчетов низших собственных частот, полученные в работе [4].

Таблица 5

H/R = 1		H/R = 2		H/R = 3	
ДИАС-3.0	Работа [4]	ДИАС-3.0	Работа [4]	ДИАС-3.0	Работа [4]
129,02	129,64	71,04	71,30	36,59	36,77
123,30	123,88	66,70	66,95	34,12	34,29

4. Выводы.

Предлагается метод расчета упругих оболочек с акустическими средами, базирующийся на дискретизации акустических систем с помощью метода конечных элементов и решении полученного матричного уравнения методом частотной конденсации. Показано, что такой подход обладает достаточно хорошей точностью при нахождении собственных частот акустических систем.

Литература

1. Blevins R.D. Formulas for Natural Frequency and Mode Shape. Van Nostrand. New York, 1979.
2. Kung C.H. Finite Element and Experimental Modelling of Three Dimensional Annular Like Acoustic Cavities Using the Normal Mode Approach. Ph. D. dissertation, The Ohio State University, 1984.
3. Мокеев В.В. О Задаче Нахождения Собственных Значений и Векторов Больших Матричных Систем. Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. Т. 32, N 10, 1992. С. 1652-1657.
4. Шклярчук Ф.Н. Колебания Упругой Оболочки, Содержащей Тяжелую Сжимаемую Жидкость . Сборник научных докладов 3 симпозиума. ЦНТИ "Волна", 1976 - С. 386-396