

Разрушение балок из слоистых композитов с дефектами типа расслоений при динамическом нагружении

Г.Х. Мурзаханов, В.Н. Щугорев

Московский энергетический институт / Технический университет, Россия

Динамический рост трещин является одним из широко исследуемых вопросов механики разрушения. Подход к решению таких задач аналогичен подходу к задачам устойчивости и квазистатического роста трещин в твердых телах при циклическом и медленно меняющемся во времени нагружении [1,2]. Исходным пунктом служит общее уравнение динамики Даламбера - Лагранжа для системы с двумя группами координат: координат Гриффитса и координат Лагранжа. Параметры первой группы характеризуют формы и размеры трещин, параметры второй - характеризуют поле перемещений в теле с трещинами при заданных значениях координат первой группы. Изучение поведения композитов при низкоскоростном ударе начато сравнительно недавно [3-6].

В связи с широким применением композитов в машиностроении, большой интерес представляет поведение балки с трещиной при низкоскоростном ударном нагружении. Будем рассматривать балки с трещинами типа отслоений (лежащих у поверхности) и расслоений в глубине балки.

Рассмотрим балку из слоистого композита с приповерхностным дефектом типа отслоения (см.рис.1). Нагружение производится свободно падающим грузом, характеризующимся массой m и скоростью V_0 в момент контакта. За характеристику трещиностойкости примем удельную работу разрушения γ , определяемую как работу, затрачиваемую на образование единицы площади трещины. В общем случае

$$\gamma = \gamma_0 + \alpha_1 \frac{dl}{dt}$$

где γ_0 – удельная работа при статическом нагружении $\gamma_0 = \Delta A / \Delta S$, ΔA – работа, затрачиваемая на приращение площади трещины ΔS , α_1 – некоторый коэффициент, характеризующий зависимость удельной работы разрушения от скорости роста трещины, dl/dt – скорость распространения трещины.

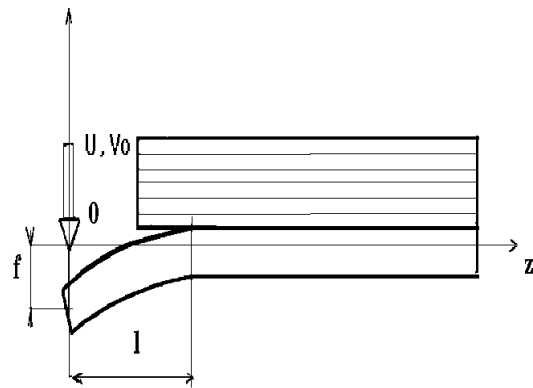


Рис. 1. Заданная система

Будем считать, что для исследуемого низкоскоростного удара влияние dl/dt на γ мало. Будем полагать, что масса падающего груза m значительно больше массы отслоившегося участка. Ось OZ совпадает с продольной осью балки, ось OY ортогональна расположению слоев композита. Отслоение характеризуем длиной l , шириной b и толщиной h . За обобщенную координату Лагранжа примем максимальный прогиб балки f в направлении оси OY, за обобщенную координату Гриффитса - длину отслоения l в направлении оси OZ. Для аппроксимации прогиба консольной балки примем $w(z,t)$ в виде

$$w(z, t) = f(t) \left[1 - \frac{z}{l} \right]^3. \tag{1}$$

Будем считать, что поведение отслоения не влияет на напряженно-деформированное состояние основного объема. Тогда потенциальную энергию деформации U представим в виде:

$$U = U_e + U_0, \quad (2)$$

где U_e - потенциальная энергия деформации основного объема, U_0 - потенциальная энергия деформации отслоения,

$$U_0 = \int_0^l E_z J_x(z) w_{,zz}^2 dz, \quad w_{1zz} = \frac{d^2 w}{dz^2} = f(t) \left[\frac{6}{l^2} - \frac{6z}{l^3} \right],$$

$J_x(z)$ - момент инерции сечения балки, E_z - модуль Юнга. Введя обозначение

$$B = J_x E_z = \frac{bh^3}{12} E_z, \text{ преобразуем формулу (2) для потенциальной энергии:}$$

$$U = \frac{6Bf^2}{l^3} \quad (3)$$

Представим сумму виртуальных работ внешних и внутренних сил в виде:

$$\delta A_l + \delta A_i = -\delta U + P\delta f = G\delta l + Q\delta f, \quad (4)$$

$$\text{где } G = -\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{18Bf^2}{l^4}, \quad Q = mg - \frac{12Bf}{l^3}.$$

Виртуальная работа сил сопротивления росту отслоения $\delta A_f = \Gamma\delta l$, $\Gamma = \gamma b$ - обобщенная сила сопротивления продвижению фронта трещины. Для обобщенной силы инерции имеем выражения:

$$I = -m \frac{d^2 f}{dt^2}, Y \equiv 0.$$

Используя формулу (4), получаем систему уравнений:

$$G \leq \Gamma, Q + I = 0. \quad (5)$$

Представим (5) в виде:

$$\frac{18Bf^2}{l^4} \leq \gamma b \quad (6)$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{12B}{ml^3} f = g \quad (7)$$

Неравенство в уравнении (6) соответствует субравновесной трещине. Если это неравенство выполняется, то трещина неподвижна, а уравнение (7) интегрируется для $l = l_0$, при следующих начальных условиях:

$$f(0) = 0 \quad \frac{df(0)}{dt} = V_0, \quad (8)$$

где $V_0 = \sqrt{2gH}$, g - ускорение свободного падения.

При постановке граничных условий считалось, что масса ударника больше массы отслоения. Пока выполняется условие ($G \leq \Gamma$) дифференциальное уравнение (7)

интегрируется с постоянным значением $l = l_0$. Решение (7) с учетом начальных условий (8) можно представить в виде:

$$f(t) = \frac{V_0}{\alpha} \sin(\alpha t) - \frac{g}{\alpha^2} \cos(\alpha t) + \frac{g}{\alpha^2}. \quad (9)$$

Здесь $\alpha = \left(\frac{12B}{ml^3}\right)^{1/2}$. Первое достижение знака равенства в выражении (6) отвечает

страгиванию трещины ($G = \Gamma$). Момент времени t^* и $\frac{dl}{dt} = \frac{df}{dt}(f, l)$ определим из

условия $G = \Gamma$, т.е. $\frac{18Bf_*^2}{l_0} = \gamma b$, откуда максимальный прогиб при $t = t^*$ равен

$$f_* = \left(\frac{\gamma b l_0^4}{18B}\right). \quad (10)$$

Здесь l_0 - начальная длина отслоения в момент страгивания трещины при $t = t^*$ или в общем виде, с учетом (9) и (10),

$$t_{1,2}^* = \frac{\alpha}{\alpha_0} \arctg \left[\frac{-C_1 \pm (C_1^2 + C_2^2 - C_3^2)^{1/2}}{C_2 + C_3} \right], \quad (11)$$

где $\alpha_0 = \left(\frac{12B}{ml_0^3}\right)^{1/2}$; $\frac{V_0}{\alpha_0} = C_1$; $\frac{g}{\alpha_0^2} = C_2$; $\frac{g}{\alpha_0^2} - f_* = C_3$; $t_* = \min(t_1^*, t_2^*)$.

Рассмотрим динамику роста трещины на каждом шаге по времени при выполнении условий $G = \Gamma$ и $Q + I = 0$. Рост трещины продолжается пока G не станет меньше Γ . Равенство нулю обобщенной силы, продвигающей трещину является критерием для нахождения времени остановки трещины t_{**} . В нашем случае $dl/dt = 0$, лишь тогда, когда $df/dt = 0$, следовательно момент времени t_{**} определяется из условия $f'(t) = 0$. На участке времени $t \in (t_{**}, t_{end}]$, (t_{end} - время, при котором выполняется $f(t_{end}) = 0$) $f(t)$ вычисляется по формуле (9) с учетом того, что

$\alpha = \left(\frac{12B}{ml_k^3}\right)^{0.5}$, где l_k - конечный размер трещины. Определим минимальную скорость

удара $V_{0 \min}(H_{\min})$ при заданной массе груза m , при которой происходит страгивание трещины. Закон сохранения энергии в этом случае имеет вид $U_n = U_\sigma$, где U_n - потенциальная энергия падающего груза; U_σ - потенциальная энергия деформации балки :

$$U_n = mg(H + f_*); U_\sigma = \frac{6Bf_*^2}{l_0^3}$$

или в общем виде имеем :

$$mg(H + f_*) = \frac{6Bf_*^2}{l_0^3},$$

отсюда определяем H_{\min} :

$$H_{\min} = \frac{\frac{6Bf_*^2}{l_0^3} - mgf_*}{mg}, \quad V_{0\min} = (2gH_{\min})^{1/2} \quad (12)$$

Для расчета использовались следующие данные: $E_z = 30 \cdot 10^9$ Па, $g = 9,8$ м/с², $\gamma = 1 \cdot 10^3$ Дж / м², $b = 5 \cdot 10^{-2}$ м, $h = 1 \cdot 10^{-3}$ м, $l_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ м. Для различных значений m были найдены H_{\min} и $V_{0\min}$. Результаты представлены в табл. 1.

Таблица 1

m, кг	0.175	0.2	0.25	0.3
H_{\min} , м	0.1925	0.1682	0.1342	0.1115
$V_{0\min}$, м/с	1.942	1.816	1.622	1.478

По результатам исследований были построены зависимости $l(t)$, $G(t)$, $f(t)$ для двух случаев. Первую группу составляют зависимости для постоянной скорости в момент контакта $V_0 = 1,98$ м/с, графики которых представлены на рис.2. Цифры 1 - 4 на представленных рисунках соответствуют грузам с массой $m = 0.175; 0.2; 0.25; 0.3$ кг. Время старта, остановки и конечный размер трещины представлены в табл. 2.

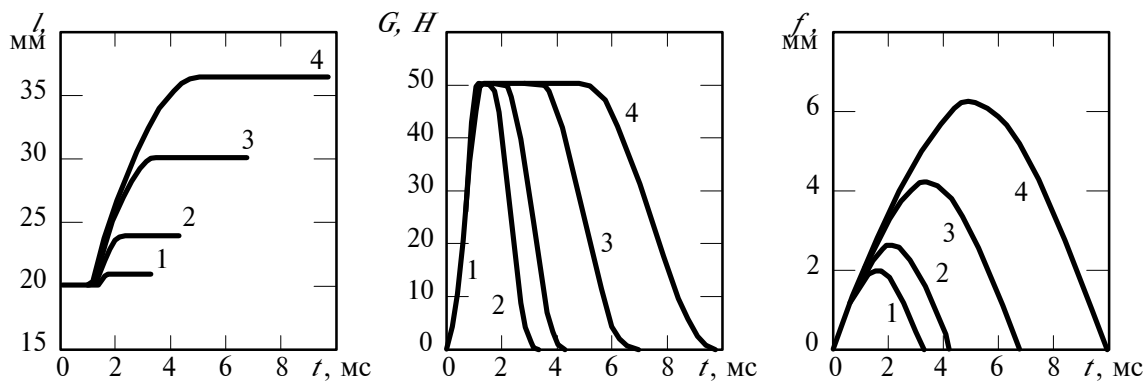


Рис. 2.

Таблица 2

m, кг	0.175	0.2	0.25	0.3
t^* , мс	1.4	1.3	1.1	0.8
t^{**} , мс	1.7	1.9	3.4	5.0
l_k , мм	21	24	30	36

Во втором случае эти же зависимости построены при постоянной массе груза $m = 0.2$ кг для следующих значений скорости ударника в момент контакта: $V_0 = 1,82; 1,98; 2,21; 2,42$ м/с (рис. 3). При $V_0 = 1,82$ м/с страгивание трещины не наблюдается (цифры 1 - 4 на графиках соответственно), т.е. энергии ударника недостаточно для страгивания трещины. Момент старта и момент остановки трещины, а также ее конечный размер представлен в табл. 3:

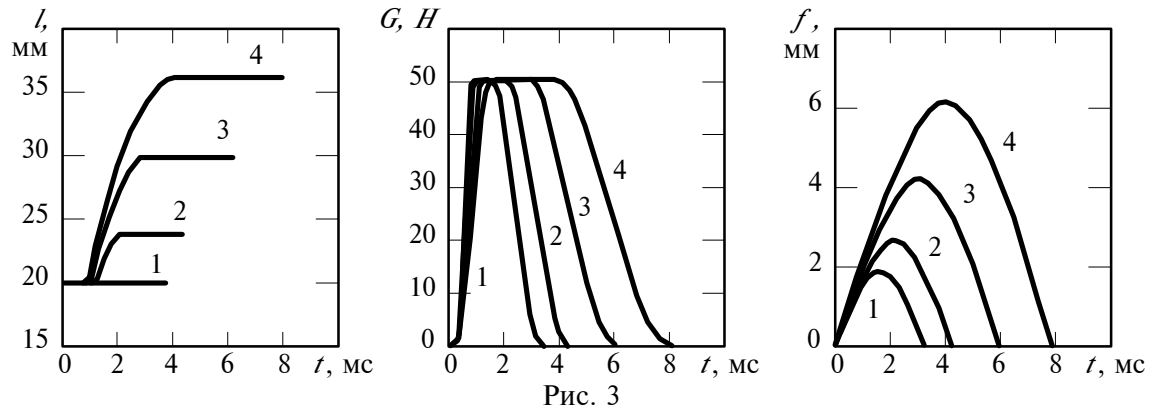


Таблица 3

$V, \text{ м/с}$	1,98	2,21	2,42
$t^*, \text{ мс}$	1,2	1,0	0,8
$t^{**}, \text{ мс}$	2,2	3,2	4,2
$l_k, \text{ мм}$	24	30	36

Все расчеты проводились при $l_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ м. Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы, что с увеличением энергии груза

$U = mgH = \frac{1}{2} mV_0^2$ уменьшается время страгивания трещины и увеличивается время до остановки (увеличивается длина временного интервала $[t^*, t^{**}]$, а на графиках зависимости $G(t)$ - длина площадки, где $G = \Gamma$); возрастает амплитуда прогиба балки f , а максимальное значение прогиба смещается по оси времени вправо; для постоянной энергии нагружения конечный размер отслоения одинаков.

Рассмотрим балку из слоистого композиционного материала, с межслойной трещиной (см.рис.4). Ось OZ совпадает с осью балки и параллельна слоям, ось OY ортогональна расположению слоев. Будем считать, что трещина находится на расстоянии

h_1 от верхней поверхности балки, длина трещины - $|a_{10}|$ и $|a_{20}|$ относительно начала координат, ширина балки - b , толщина - h . Балку будем считать шарнирно-опертой на две опоры, расстояние между которыми $2l$. Нагружение производится падающим грузом, обладающим к моменту соприкосновения с балкой потенциальной энергией

$U = mgH$ и скоростью V_0 . Масса падающего груза m значительно больше массы балки. Исследование разрас-

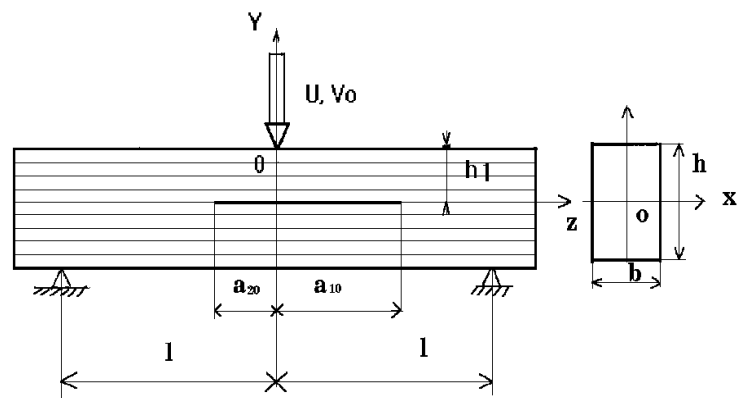


Рис. 4

тания межслойных дефектов при квазистатическом трехточечном нагружении выполнено в работе [6]. Будем полагать, что в процессе нагружения трещина будет распространяться в своей плоскости. За обобщенную координату Лагранжа примем прогиб балки f в направлении оси ОУ при $z = 0$; за первую обобщенную координату Гриффитса - длину отслоения a_1 в направлении оси ОZ, за вторую - a_2 , обе координаты отсчитываются от начала координат ($Z=0, Y=0$). Для прогиба балки примем аппроксимацию типа:

$$w(z, t) = f(t) \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right).$$

Динамический прогиб балки принят равным статическому с изменяющимся во времени параметром f . Трещину будем считать необратимой, т.е.:

$$\frac{da_1}{dt} \geq 0; \quad \frac{da_2}{dt} \leq 0.$$

Выражение для потенциальной энергии деформации как нормальных, так и касательных напряжений имеет вид:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-l}^l E_z J_x(z) w_{1zz}^2 dz + \frac{1}{2} \int_{-l}^l \frac{\left[E_z J_x(z) \left(\frac{d^3 w}{dz^3} \right) \right]^2}{GF(z)} dz, \quad (13)$$

где $w_{1zz} = \frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{\pi^2 f}{4l^2} \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right)$, $w_{,zzz} = \frac{d^3 w}{dz^3}$,

$F(z)$ - площадь поперечного сечения балки, $J_x(z)$ - момент инерции сечения балки;

для неповрежденного участка $J_0 = \frac{bh^3}{12}$, для поврежденного - $J_1 = \frac{bh_1^3}{12} + \frac{b(h-h_1)^3}{12}$.

С учетом вышесказанного выражение для потенциальной энергии деформации будет:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-l}^{-a_2} w_{1zz}^2 E_z J_0 dz + \frac{1}{2} \int_{-a_2}^{a_1} w_{1zz}^2 E_z J_1 dz + \frac{1}{2} \int_{a_1}^l w_{1zz}^2 E_z J_0 dz +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-l}^{-a_2} \left(\frac{d^3 w}{dz^3} \right) \frac{(E_z J_0)^2}{GF} dz + \frac{1}{2} \int_{-a_2}^{a_1} \left(\frac{d^3 w}{dz^3} \right) \frac{(E_z J_1)^2}{GF} dz + \frac{1}{2} \int_{a_1}^l \left(\frac{d^3 w}{dz^3} \right) \frac{(E_z J_0)^2}{GF} dz \quad (14)$$

Вводя обозначения $B_0 = E_z J_0$, $B_1 = E_z J_1$, $\omega = \pi / l$, $K = GF$,

$$\frac{\omega^3}{64} (B_1 - B_0) + \frac{\omega^5}{256K} (B_0^2 - B_1^2) = n_1, \quad \frac{\omega^4}{64} B_0 + \frac{\omega^6}{256K} B_0^2 = n_2,$$

$$\frac{\omega^4}{64} B_1 + \frac{\omega^6}{256K} B_1^2 = n_3,$$

получим выражение для U в виде:

$$U = \left\{ n_1 (\sin \omega a_1 + \sin \omega a_2) + n_2 (2l - a_1 - a_2) + n_3 (a_1 + a_2) \right\} f^2 \quad (15)$$

Представим сумму виртуальных работ внешних и внутренних сил как:

$$\delta A_l + \delta A_i = -\delta U + P\delta f = G_1\delta a_1 + G_2\delta a_2 + Q\delta f, \text{ где}$$

$$G_1 = (-n_1\omega \cos \omega a_1 + n_2 - n_3)f^2,$$

$$G_2 = -(-n_1\omega \cos \omega a_2 + n_2 - n_3)f^2,$$

$$Q = mg - 2f[n_1(\sin \omega a_1 + \sin \omega a_2) + n_2(2l - a_1 - a_2) + n_3(a_1 + a_2)]$$

Виртуальная работа сил сопротивления росту отслоения: $\delta A_f = -\gamma b \delta a_i$ ($i=1,2$), тогда

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \gamma b. \text{ Для обобщенной силы инерции имеем выражение: } I = -m \left(\frac{d^2 f}{dt^2} \right).$$

Таким образом получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} |G_1| \leq \gamma b \\ |G_2| \leq \gamma b \\ Q + I = 0 \end{cases} \quad (16)$$

В общем виде:

$$\begin{cases} |-(n_1\omega \cos \omega a_1 - n_2 + n_3)f^2| \leq \gamma b \\ |-(n_1\omega \cos \omega a_2 - n_2 + n_3)f^2| \leq \gamma b \end{cases} \quad (17)$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{2f}{m} [n_1(\sin \omega a_1 + \sin \omega a_2) + n_2(2l - a_1 - a_2) + n_3(a_1 + a_2)] = g \quad (18)$$

или (18) имеет вид:

$$\begin{cases} (n_1\omega \cos \omega a_1 - n_2 + n_3)f^2 \leq \gamma b \\ (n_1\omega \cos \omega a_2 - n_2 + n_3)f^2 \leq \gamma b \end{cases} \quad (19)$$

Неравенства в (19) соответствуют субравновесной (неподвижной) трещине. При выполнении неравенства в (17) интегрирование уравнений для равновесной трещины производится при постоянных a_1 и a_2 . Пока выполняются неравенства в (19) дифференциальное уравнение (18) интегрируется с постоянными a_1 и a_2 (прогиб балки f под действием груза изменяется, трещина не растет). Решение (18) с учетом начальных условий имеет вид:

$$f(t) = \frac{V_0}{\alpha} \sin(\alpha t) - \frac{g}{\alpha^2} \cos(\alpha t) + \frac{g}{\alpha^2}. \quad (20)$$

Первое достижение знака равенства в (19) отвечает страгиванию одного из фронтов трещины ($G_i = \Gamma_i, i = 1,2$). Вначале определим значение f_1^* из ($G_1 = \Gamma_1$) и f_2^* из ($G_2 = \Gamma_2$), т.е.

$$f_1^* = \left[\frac{\gamma b}{n_1\omega \cos \omega a_{10} - n_2 + n_3} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

и

$$f_{2*} = \left[\frac{\gamma b}{n_1 \omega \cos \omega a_{20} - n_2 + n_3} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

Вначале происходит страгивание по той обобщенной координате Гриффитса, для которой выполняется

$$f_i^* = \min(f_1^*, f_2^*) \quad (23)$$

Время страгивания по этой координате вычисляется аналогично (11) при

$$C_1 = \frac{V_0}{\alpha_0}; C_2 = \frac{g}{\alpha_0^2}; C_3 = \frac{g}{\alpha_0^2} - f_1^*$$

По достижении равенства в одном из условий (17), решение (18) проводится с учетом изменения a_1 и a_2 . Как только $f'(t) = 0$, рост отслоения по двум координатам прекращается; это является условием для нахождения времени остановки роста трещины t^{**} .

Минимальная скорость удара V_{0min} при заданной массе ударника m , при которой происходит страгивание трещины, определяется по формуле (13), с учетом того, что энергия балки вычисляется согласно (18); $a_1 = a_{10}$; $a_2 = a_{20}$; $f^* = \max(f_1^*, f_2^*)$.

Для двух случаев начальных размеров отслоения при одинаковой энергии нагружения были построены графики зависимости $l(t)$, $G(t)$, $f(t)$ (см.рис.5) при постоянной энергии нагружения $U = mgH = 22.05$ Дж.

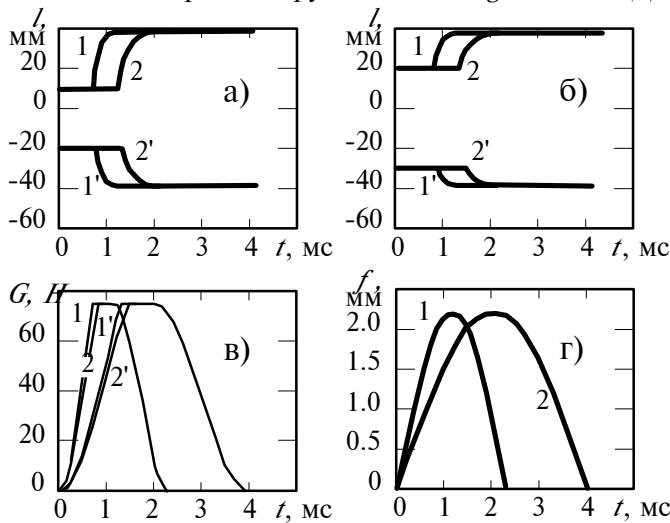


Рис. 5

- а) $a_{10} = 10$ мм, $a_{20} = -20$ мм;
- б) $a_{10} = 20$ мм, $a_{20} = -30$ мм,

Анализируя полученные зависимости, можно сделать следующие выводы:

- 1) При постоянной энергии нагружения U графики зависимостей $l(t)$, $G(t)$ и $f(t)$ для различных значений a_{10} и a_{20} совпадают.
- 2) Конечный размер отслоения при $U = \text{const}$ одинаков (в нашем случае $|a_{20}| = |a_{10}| = 38$ мм).
- 3) Процесс роста отслоения происходит следующим образом: сначала происходит старт и последующий рост трещины по меньшей координате a_1 до тех пор пока $|a_1| = |a_{20}|$, затем наблюдается

старт трещины по координате a_2 , и в итоге происходит синхронный рост отслоения по двум координатам. Критерием остановки роста трещины является условие: $df/dt = 0$

Рассмотрим случай симметричной трещины ($a_{10} = -a_{20}$) - см. рис.6. При этом $|G_1| = |G_2| = G$ (см. формулу (19)). Алгоритм решения задачи тот же, что был описан выше, но здесь учитывается следующее: $t_1^* = t_2^* = t^*$, т.е. наблюдается одновременный старт трещины по двум координатам.

Рассмотрим зависимость времени старта и остановки трещины от положения трещины по высоте образца. Положение

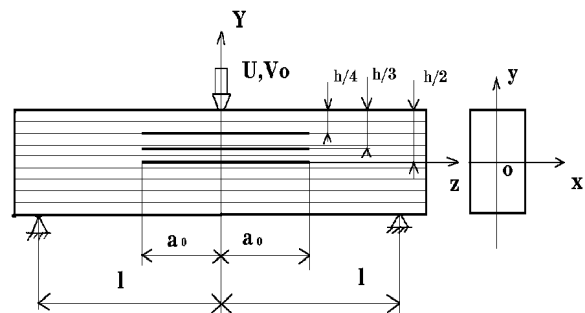


Рис. 6

трещины по высоте образца определяется размером h_1 . Графики зависимостей $l(t)$, $G(t)$ и $f(t)$ приведены на рис.7.

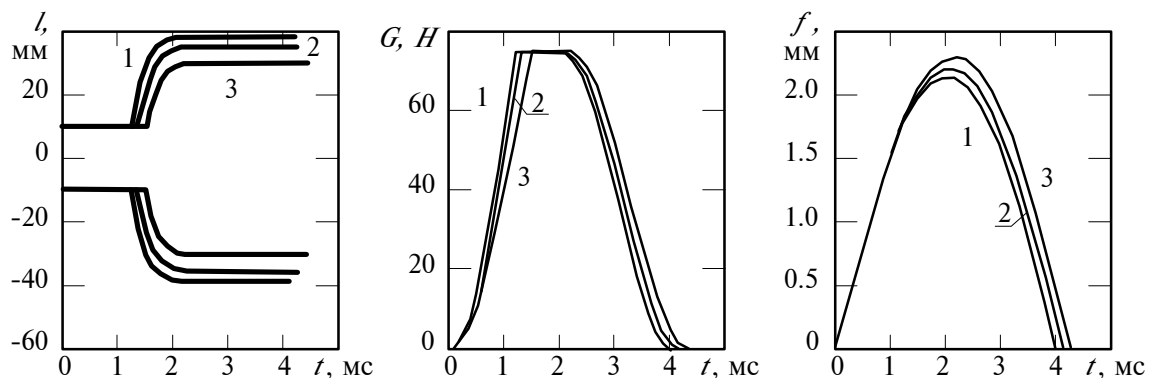


Рис. 7

Цифры 1 - 3 на рисунках соответствуют $h_1 = h/2$; $h/3$; $h/4$. При перемещении трещины от срединной поверхности балки ($y = 0$) к поверхности балки ($y = h/2$) время старта трещины увеличивается, то же самое происходит с временем останки. Это объясняется тем, что при $y = 0$ ($h_1 = h/2$) условие равновесия $G = \Gamma$ достигается при меньшем значении прогиба f , чем при $y = h/6$ ($h_1 = h/3$) и $y = h/4$ ($h_1 = h/4$).

Литература

1. Болотин В.В., Болотина К.С., Радин В.П., Щугорев В.Н. Характеристики трещиностойкости слоистых композитов // Механика композитных материалов.-- 1996. -- Т.32, №1. -- С.21 -- 31.
2. Болотин В.В. Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов // Механика композит. материалов. -- 1984. -- № 2. -- С. 239 -- 255.
3. Bolotin V.V. Fracture and fatigue of composite plates and shells // Inelastic Behaviour of Plates and Shells. -- Heidelberg: Springer, 1986. -- P. 131 -- 161.
4. Болотин В.В., Гришко А.А., Щугорев В.Н. Остаточная послеударная несущая способность тканевых композитов с начальными межслойными трещинами // Механика композит. материалов. -- 1994. -- Т. 30, № 5. -- С. 600 -- 608.
5. Sun C.T., Jih C.J. On strain energy release rates for interfacial cracks in bi - material media // Engng Fracture Mech. -- 1987. -- Vol. 28, № 1. -- P. 13 -- 18.
6. Мурзаханов Г.Х., Несин Д.Н. Разрастание межслойных дефектов в неоднородном поле деформаций // Проблемы прочности. -- 1987. -- №11. -- С. 73 -- 76.