

# Задача о плоской упругопластической волне. Метод дискретизации

Понькин А.В., Садаков О.С., Сапожников С.Б.

*Челябинский государственный технический университет*

Проблема ударного взаимодействия стержней с преградами при средних баллистических скоростях (0,5-2км/с) имеет важное прикладное значение, связанное с созданием эффективных поражающих и защитных средств (снаряды, пули и броня). В классической постановке задача о пробивании мишеней стержнями разлагается на две части: первая - расчет упругих или упругопластических волновых процессов в стержне и мишени с целью оценки их прочности; и вторая - решение проблемы пенетрации - пробивания, с вычислением остаточных скоростей снаряда, мишени и осколков.

В данной статье сделана попытка детально рассмотреть первую задачу - об упругопластической волне в полубесконечном стержне из склерономного [1] материала при его взаимодействии с преградой. Эта задача была решена рядом авторов в постановках различной степени строгости, поэтому сошлемся на обзорную монографию [2], в которой достоинства и недостатки известных подходов рассмотрены достаточно подробно. Отметим лишь, что УЧЕТ реальных диаграмм "напряжение - деформация" во фронте нагрузки и разгрузки при движении упругопластической волны - актуальная задача, решение которой с единых позиций (суммирование фронтов дискретного типа) - дано в этой статье.

В отличие от упругой волны, форма упругопластической изменяется в процессе ее продвижения. С этим связаны определенные математические трудности [3] при вычислении напряжений и деформаций, для преодоления которых здесь предлагается дискретизация решения с применением функции Хевисайда, ее производной и интеграла. Волна разбивается на сумму волн, каждая из которых может смещаться со своей, отличной от других, скоростью. Для склерономного неупругого материала такое решение оказывается весьма эффективным.

1. Рассмотрим полубесконечный упругопластический стержень с продольной осью  $x$  ( $x \geq 0$ ), свободный край стержня имеет координату  $x=0$ ), по которому движется продольная волна (растяжение-сжатие).

Геометрическое уравнение

$$\varepsilon = u' \equiv du / dx, \quad (1)$$

( $\varepsilon$  - продольная деформация,  $u$  - смещение сечения вдоль  $x$ ) и уравнение движения

$$\sigma' = \rho u = \rho d^2 u / dt^2, \quad (2)$$

( $\sigma$  - напряжение в поперечном сечении,  $\rho$  - плотность среды,  $t$  - время) должны быть дополнены физическим соотношением, связывающим напряжение и деформацию в зависимости от истории нагружения. Как увидим в дальнейшем, определяющее уравнение для реологических свойств среды не является необходимым; будем считать, что диаграмма деформирования при нужной программе нагружения известна (возможно, из эксперимента).

Решение данной системы уравнений предлагается искать в виде суперпозиции  $n$  движущихся фронтов дискретного вида

$$u = \sum_{i=1}^n a_i \{x_i - x\}, \quad \dot{x}_i = b_i. \quad (3)$$

Здесь фигурные скобки (скобки *Makaley*) обозначают функцию  $\{z\} = z$  при  $z > 0$ , иначе  $\{z\}=0$ . Легко видеть, что эта функция представляет собой интеграл от функции Хевисайда

$$\{z\} = \int_{-\infty}^z H(x) dz, \quad (4)$$

$H(z) = 1$  при  $z \geq 0$ , иначе  $H(z) = 0$ . Параметры  $a_i, b_i$  в выражении (3) - константы. Величина  $x_i$  представляет собой координату переднего края фронта,  $b_i$  - скорость движения этого края.

Покажем, что решение в форме (3) позволяет удовлетворить всем условиям задачи. С одной стороны

$$e = u' = -\sum_i a_i H(x_i - x); \quad (5)$$

с другой,

$$v \equiv \dot{u} = \sum_i a_i b_i H(x_i - x), \quad (6)$$

$$u = \sum_i a_i b_i^2 \delta(x_i - x), \quad (7)$$

где  $\delta(z)$  - функция Дирака; ее интеграл дает функцию Хевисайда. Из выражений (2), (7) получим

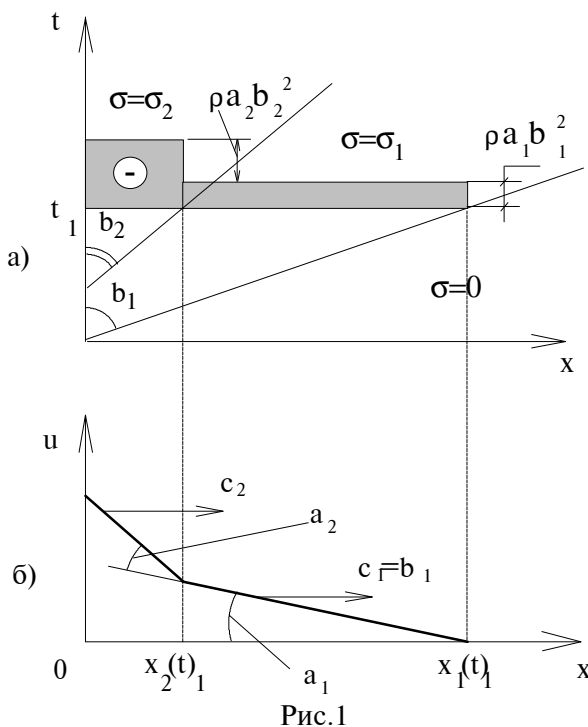
$$\sigma = -\int_x^{\infty} \sigma' dx = -\int_x^{\infty} \rho \sum_i b_i^2 \delta(x_i - x) dx = -\rho \sum_i a_i b_i^2 H(x_i - x), \quad (8)$$

(учтено, что  $\sigma(x=\infty)=0$ ). Сопоставив выражения (5) и (8), заметим, что  $i$ -ый фронт (скачок) деформации совпадает с  $i$ -ым фронтом напряжения, а области постоянной деформации между фронтами отвечают областям постоянного напряжения.

Знаки скачков напряжения ( $-\rho a_i b_i^2$ ) и деформаций ( $-a_i$ ) совпадают при любых  $a_i$  (полагаем, что  $b_i > 0$ ).

Это вполне соответствует свойствам склерономного упругопластического устойчивого ( $d\sigma/d\varepsilon > 0$ ) материала.

Для примера на рис.1 показан случай  $n = 2$  - движение двух фронтов сжимающих напряжений. Плоскость  $\{x, t\}$  делится на три области, в каждой из которых постоянны напряжения, деформации, скорости смещений  $v = \dot{u}$  (выражение(6)). На рис.1а приведена эпюра напряжений в стержне в некоторый момент времени  $t_1$ . Эпюра смещений в этот момент дана на рис.1б. Скорости  $c_i$  здесь обозначают групповые скорости смещения фронта (скорости изменения координаты  $x$  с заданной постоянной величиной  $u$ ). На первом участке эта скорость совпадает со скоростью координаты скачка напряжения (деформации)  $\dot{x}_1 = b_1$ , однако на втором скорость  $c_2$  не равна скорости  $\dot{x}_2 = b_2$ , в отличие от ситуации в



идеально упругом теле. В общем случае групповая скорость на участке (i+1) находится по известным значениям  $c_i, b_{i+1}, u'_i, u'_{i+1}$  (последние величины представляют наклоны эпюры и на соответствующих участках) по выражению, достаточно просто получаемому из геометрических построений

$$c_{i+1} = \frac{u'_i}{u'_{i+1}}(c_i - b_{i+1}) + b_{i+1}, \quad u'_o = 0. \quad (9)$$

В частности, для нашего примера

$$c_1 = b_1, \quad c_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_2}(c_1 - b_2) + b_2 = \frac{v_1 + v_2}{a_1 + a_2}, \quad v_i \equiv a_i b_i. \quad (10)$$

На рисунке второй фронт отстает от первого ( $b_2 < b_1$ ), что, как увидим ниже, соответствует неупругому деформированию устойчивого материала. Скачок деформации на i-м фронте равен  $-a_i$ , а скачок напряжения равен  $-\rho a_i b_i^2$ . Отсюда

$$b_i = \sqrt{S_i / \rho}, \quad S_i \equiv \Delta\sigma_i / \Delta\varepsilon_i, \quad \Delta\varepsilon_i = -a_i \quad (11)$$

В случае линейной связи  $\sigma = E\varepsilon$  все значения  $S_i$  равны модулю упругости  $E$ , скорости  $b_i$  одинаковы и равны скорости звука

$$c = \sqrt{E / \rho}, \quad (12)$$

групповые скорости  $c_i$  (выражение (9)) также равны  $c$  и суммарная форма фронта неизменна (известное решение для упругого тела). Если же на некоторой i-ой ступени нагрузки следует выход на неупругое деформирование, то соответствующее значение  $S_i$  меньше  $E$ , а  $b_i$  меньше  $c$  и эта ступень отстает от упругого фронта. Так, на рис.1 область  $\sigma = \sigma_1$  увеличивается с течением времени.

2. Интересен случай, когда за фронтом неупругого деформирования следует фронт разгрузки (рис.2,3).

Пусть первый фронт (i=1) отвечает сжатию до напряжения  $\sigma_R = -200$  МПа; на диаграмме деформирования (рис.2 и 3в) это соответствует деформации  $\varepsilon_R = -0,5\%$ .

Отсюда  $a_1 = -\varepsilon_R = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $S_R = \frac{\sigma_R}{\varepsilon_R} = 40$  ГПа,  $b_1 = \sqrt{S_R / \rho} = 2,28 \cdot 10^3$  м/с (полагалось, что  $\rho = 7800$  Нс<sup>2</sup>м<sup>-4</sup>). Разгрузка (i=2) считается упругой; здесь

$$b_2 = c = \sqrt{E / \rho} = 5,07 \cdot 10^3 \text{ м/с} \quad (\text{принято } E = 200 \text{ ГПа}),$$

$$a_2 = -\Delta\varepsilon = \frac{\Delta S}{E} = \frac{S_R}{E} = 10^{-3},$$

$$\varepsilon_0 = u'_2 = -(a_1 + a_2) = -4 \cdot 10^{-3} \quad (\varepsilon_0 - \text{остаточная деформация}).$$

Величина  $b_2 = c$  в 2,24 раза выше  $b_1$ , и фронт разгрузки догоняет фронт сжатия (рис.3а). Если длительность силового импульса на свободный край стержня ( $z=0$ ) равна  $t_{02} = 10^{-3}$  с, то через  $\Delta t = t_{02} b_1 / (b_2 - b_1) = 8,1 \cdot 10^{-4}$  с

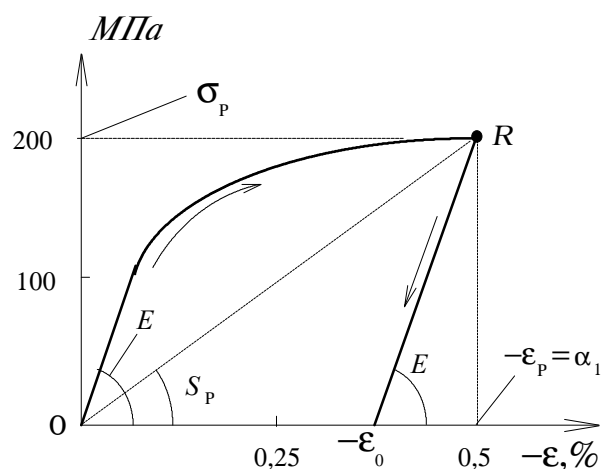


Рис.2.

задний фронт догонит передний в сечении  $x^* = b_2 \Delta t = (5,07 \cdot 10^3 \text{ м/с})(8,1 \cdot 10^{-4} \text{ с}) = 4,1 \text{ м}$ .

Момент  $t^*$ , когда исчезает первый участок сжатия, является поворотным в данной задаче. Эпюра смещений из двузвенной (утолщенная линия на рис. 3б) превращается в однозвенную. Более интересны эпюры напряжений (весь стержень свободен от напряжений) и скоростей  $v$ . Последняя кусочно постоянна и в части стержня  $x < x^*$  скорость равна  $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 6,33 \text{ м/с}$ . В остальной части стержня  $v = 0$ . Ситуация в этот момент неотличима от следующей: стержень длиной 4,1 м, летящий со скоростью 6,33 м/с (напряжения отсутствуют, скорости всех точек одинаковы) ударяется о неподвижный ненагруженный стержень (рис. 3в).

3. Решение этой новой задачи целесообразно искать также в виде дискретных фронтов типа (3). Иначе говоря, полагаем, что сечение  $x^*$ , начиная с момента  $t^*$ , смещается вправо с постоянной скоростью - естественно, меньшей  $v$ .

Следовательно, возникают два движущихся фронта: с положительным значением  $v^+$  (по правой части стержня) и с в обычном виде отрицательным значением  $\bar{v}$  - по левой. Решение для правой части ищем в обычном виде

$$x \geq x^*, \quad t \geq t^*: u = a^+ \{b^+(t - t^*) + x^* - x\}, \quad b^+ > 0; \quad (13)$$

для левой следует учесть обратное направление волны и начальную постоянную скорость  $v$  всех точек:

$$\begin{aligned} x \leq x^*, \quad t \geq t^*: u &= v(t - t^*) - a^- \{x - x^*\}, \\ x^- &= x^* - b^-(t - t^*), \quad b^- > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Для решения задачи используем условия сплошности, равновесия и физические. Первое требует, чтобы смещения  $u(x^*, t)$ , определяемые из выражений (13) и (14), совпали, откуда

$$a^+ b^+ + a^- b^- = v; \quad (15)$$

как и ранее,

$$a^i = -\Delta \varepsilon^i; \quad b^i = \sqrt{S^i / \rho}, \quad S^i = \Delta \sigma^i / \Delta \varepsilon^i.$$

Условие равновесия требует равенства скачков напряжения в сечении  $X^*$  для левой и правой частей стержня:

$$\Delta \sigma^i = \Delta \sigma. \quad (16)$$

Физические уравнения, связывающие  $\Delta \varepsilon^i$  и  $\Delta S^i$ , должны учитывать, что если в правой части происходит начальное нагружение, то в левой части - повторное, после сжатия и разгрузки.

Решение такой нелинейной задачи удобно вести от обратного: задаваясь значением  $\Delta \sigma$ , находим  $v$  и подбираем  $\Delta \sigma$  таким, чтобы величина  $v$  была равна заданной.

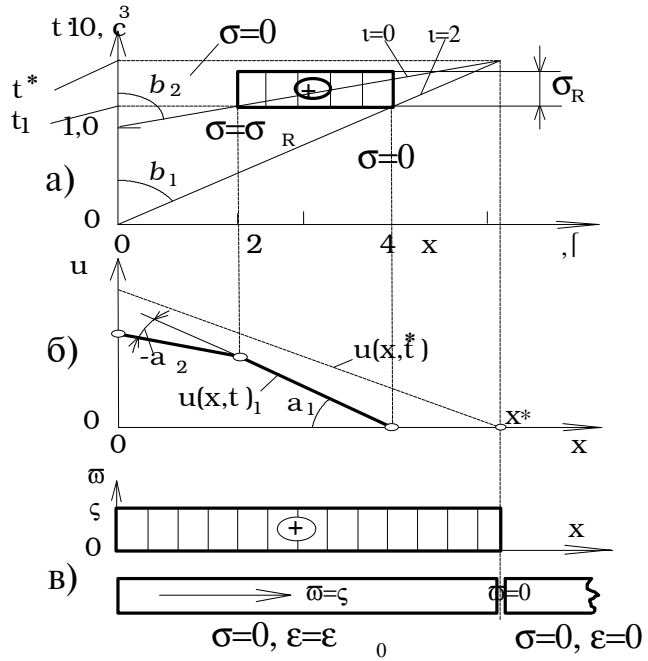


Рис.3

Задав  $\Delta\sigma$ , нетрудно найти  $\Delta\varepsilon$  (по кривым начального и повторного деформирования), откуда следуют значения  $S^1$  и  $d^1$ . По  $S^1$  находим  $b^1$  и из выражения (15) -  $v$ . Напомним, что значения  $\Delta\sigma$  и  $\Delta\varepsilon$  отрицательны,  $d^1$  и  $b^1$  - положительны.

В качестве первого приближения можно взять упругое решение, т.е.  $b^i = c$ ,  $\Delta\varepsilon^i = \Delta\sigma/E$ . Отсюда  $\Delta\sigma = E v / (2c)$ . В нашем примере это решение оказывается верным:  $\Delta\sigma = E v / (2c) = 125$  МПа, что отвечает практически упругой работе (см. кривую деформирования на рис.2) при начальном сжатии и, конечно, при повторном.

Следует иметь ввиду, что полученное решение справедливо только до момента  $t^{**}$  когда фронт  $u^-$  достигнет края стержня  $x=0$ . Здесь происходит отражение, и следует искать новое решение. Оно также будет иметь вид дискретного фронта. При достаточно высоком напряжении в новом фронте после достижения им сечения  $x^*$  возможно новое отражение вследствие различия диаграмм деформирования на левой ( $x < x^*$ ) и правой ( $x > x^*$ ) частях стержня ( $x^*$  - граница неоднородности физических свойств, связанная с влиянием эффекта Баушингера).

4. В общем случае возможны различные постановки задачи, например:

- а) Мягкое нагружение: на свободном краю задана история напряжения  $\sigma(x=0) \equiv \sigma_0(t)$ .
- б) Жесткое нагружение: на свободном краю задана история смещений  $u(x=0) = u_0(t)$ .
- в) Обратная задача: по найденной в эксперименте форме волны деформаций (перемещений) определить ее последующую и предшествовавшую эволюцию и, если возможно, восстановить условия на краю.

Заметим, что эта задача не всегда разрешима: по мере продвижения волны происходит диссипация энергии, и информация о начальном состоянии "стирается". Иначе говоря, при различных начальных формах волн их конечные (установившиеся) формы могут оказаться одинаковыми.

Порядок решения первой задачи практически рассмотрен выше.

История  $\sigma_0(t)$  аппроксимируется в виде кусочно-постоянной; по диаграмме деформирования находится история деформаций, откуда определяются значения  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $x_i(t=0)$ .

Вторая постановка задачи приводит к некоторым осложнениям. Произведя аппроксимацию заданного закона  $u(t)$  в виде кусочнолинейного и проинтегрировав его, получим  $n$  значений  $v_i \equiv a_i b_i$ . В соответствии с приведенными выше выражениями задача может быть сведена к решению системы  $n$  уравнений

$$-\Delta_i \varepsilon \sqrt{\Delta_i \sigma / \Delta_i \varepsilon} = \sqrt{\rho} v_i$$

(правая часть известна), дополняемой связью  $\Delta_i \varepsilon$  и  $\Delta_i \sigma$ , отвечающей свойствам материала при нагружении, разгрузке и, возможно, повторном нагружении.

Задача может быть решена методом последовательных приближений:

А. Полагаем вначале, что деформирование является упругим (что вполне возможно, если деформации невелики). В этом случае все значения  $S_i \equiv \Delta_i \sigma / \Delta_i \varepsilon$  равны модулю упругости  $E$ , откуда

$$\Delta_i \varepsilon = \sqrt{\rho / E} v_i = v_i / c.$$

Б. Полагаем, что найденная история деформаций  $0 \rightarrow \varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2 \rightarrow \dots \rightarrow \varepsilon_n$ , где

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1} + \Delta_i \varepsilon, \quad \varepsilon_0 = 0,$$

является истинной. Тогда, располагая свойствами материала, найдем историю напряжений ( $0 \rightarrow \sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_n$ ) и, соответственно,  $\Delta_i \sigma = \sigma_i - \sigma_{i-1}$ . Отсюда

находим уточненные значения  $S_i = \sqrt{\Delta_i \sigma / \Delta_i \varepsilon}$ .

В. Уточняем историю деформаций

$$\Delta_i \varepsilon = \sqrt{\rho / S_i} v_i.$$

Г. Если уточнение значений  $D_i \varepsilon$  представляется нам существенным, вновь переходим к п.Б. В противном случае полагаем задачу решенной. Вычисляем скорости  $dx_i / dt = -v_i / \Delta_i \varepsilon$ . Полученное решение отвечает истории деформации на краю  $x=0$ .

Значения  $dx_i / dt$  показывают, как изменяются во времени координаты ступеней догрузки. До тех пор, пока  $x_i$  не равно  $x_j$ , решение остается справедливым, но после того, как одна ступень догрузки догоняет другую, форма волны изменяется.

В качестве заключения следует сказать, что предлагаемый метод дискретизации позволяет эффективно и с единой позиции (суперпозиции фронтов дискретного вида) решать задачи о движении упругопластических волн нагрузки и разгрузки в стержнях из склерономных материалов лишь при малых деформациях (когда изменением размеров поперечного сечения стержня можно пренебречь). Однако этот метод может служить основой для создания более сложных алгоритмов, в которых учитываются большие деформации, геометрическая нелинейность, термодинамические аспекты и др., а также для расчета усилий соударения стержней с мишенями для оценки пробиваемости последних.

## Литература

1. Гохфельд Д.А., Садаков О.С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях. - М.: Машиностроение, 1984. - 256 с.
2. Динамика удара/ Зукас Дж.А., Николас Т., Свифт Х.В. и др. : Пер. с англ.- М.: Мир, 1985.- 296 с.
3. Николас Т. Упругопластические волны напряжений / Динамика удара/ Ред. Дж.Зукас, Пер. с англ. - М.: Мир, 1985.-с.47-109.