

Модель нелинейного деформирования материалов на основе углерода

Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н.

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

Для теплонагруженных конструкций современных машин характерно широкое использование углерод-углеродных композитных материалов (УУКМ) [1]. Особенности технологии обуславливают высокую степень анизотропии их механических характеристик, причем в большинстве случаев можно говорить об ортотропии свойств. Для УУКМ характерна нелинейная зависимость между напряжениями и деформациями, наиболее ярко проявляющаяся при повышенных температурах, и разносопротивляемость растяжению и сжатию.

В настоящей работе рассматривается дальнейшее развитие подхода к описанию упругопластического деформирования ортотропных материалов, предложенного в [2] и дополненного в [3].

Предположим, что в течение всего процесса деформирования выполняется соотношение

$$s = j Ke \quad (1)$$

где $S = a_{ij}S_{ij}$ – аналог объемного напряжения;

$e = b_{ij}(e_{ij} - e_{ij}^{(T)} - \tilde{e}_{ij}^{(p)})$ – аналог объемной деформации; $K = C_{ijkl}a_{kl}a_{ij}$ – аналог модуля всестороннего сжатия; j – параметр, учитывающий "псевдообъемное" деформирование; a_{ij} – симметричный переменный тензор, нормированный соотношением $a_{ij}a_{ij} = 1$; $b_{ij} = C_{ijkl}a_{kl}/K$; C_{ijkl} – тензор упругости; S_{ij} – тензор напряжений; e_{ij} – тензор малых деформаций; $e_{ij}^{(T)}$ и $\tilde{e}_{ij}^{(p)}$ – тензоры температурных и накопленных неупругих деформаций, причем здесь и далее, как правило, производится суммирование по повторяющимся индексам, пробегающим значение от 1 до 3.

Вводя аналоги шаровых тензоров деформаций $e_{ij}^* = a_{ij}e$ и напряжений $S_{ij}^* = b_{ij}S$, можно записать выражения для аналогов девиаторов деформаций и напряжений

$$e'_{ij} = e_{ij} - e_{ij}^* - e_{ij}^{(T)} - \tilde{e}_{ij}^{(p)}, \quad s'_{ij} = S_{ij} - S_{ij}^* \quad (2)$$

Связь между компонентами аналогов шаровых тензоров определяется соотношением

$$S_{ij}^* = j C_{ijkl}e_{kl}^* \quad (3)$$

Далее, вводятся обобщенные интенсивности напряжений и деформаций

$$t = \sqrt{KB_{ijkl}S'_{kl}S'_{ij}} \quad \text{и} \quad g = \sqrt{C_{ijkl}/K e'_{kl}e'_{ij}},$$

которые могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{(KB_{ijkl} - a_{ij}a_{kl})s_{kl}s_{ij}} \\ g &= \sqrt{(C_{ijkl}/K - b_{ij}b_{kl})(e_{kl} - e_{kl}^{(T)})(e_{ij} - e_{ij}^{(T)})} - \tilde{g}^{(p)} \end{aligned} \quad (4)$$

где B_{ijkl} – тензор упругой податливости, $B_{ijkl} = C_{ijkl}^{-1}$; $\tilde{g}^{(p)}$ – обобщенная интенсивность накопленной пластической деформации,

$$\tilde{g}^{(p)} = \sqrt{C_{ijkl}/K \tilde{e}_{kl}^{(p)} \tilde{e}_{ij}^{(p)}}.$$

Для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, постулируется существование инвариантной к виду деформированного состояния зависимости между обобщенными интенсивностями напряжений и термосиловых деформаций

$$t = F(\bar{g}), \quad (5)$$

в случае упругой анизотропной среды принимающей вид

$$t = K(\bar{g} - \tilde{g}^{(p)}), \quad (6)$$

где \bar{g} – обобщенная интенсивность термосиловых деформаций,

$$\bar{g} = \sqrt{(C_{ijkl}/K - b_{ij}b_{kl})(e_{kl} - e_{kl}^{(T)})(e_{ij} - e_{ij}^{(T)})}.$$

Предполагается также, что в течение всего процесса деформирования выполняется зависимость между аналогами девиаторов напряжений и деформаций

$$s'_{ij} = \frac{t}{K(\bar{g} - \tilde{g}^{(p)})} \cdot C_{ijkl} e'_{kl}. \quad (7)$$

В том случае, когда параметр "псевдообъемной" сжимаемости j отличен от единицы, выражение (7) должно быть дополнено соотношением

$$s_{ij}^* = \frac{s}{Ke} C_{ijkl} e_{ij}^* \quad (8)$$

полученным из (3) и (1).

Для определения коэффициентов поперечной деформации служит полученная из (1) система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} b_{22}m_2 + b_{33}m_3 = b_{11} - a_{11}E_1^c/(jK) \\ b_{11}E_2^c m_2/E_1^c + b_{33}m_3 = b_{22} - a_{22}E_2^c/(jK) \\ b_{11}E_3^c m_3/E_1^c + b_{22}E_3^c m_3 = b_{33} - a_{33}E_3^c/(jK) \end{cases}$$

причем E_i^c – секущие модули упругости.

Далее с учетом зависимостей (2), (7) и (8) запишем выражение, связывающее компоненты тензоров напряжений и деформаций. Последнее уравнение может быть переписано в виде

$$e_{ij} = B_{ijkl}^* s_{kl} + e_{ij}^{(T)} + \tilde{e}_{ij}^{(p)} \quad (10)$$

где B_{ijkl}^* – переменный тензор податливости,

$$B_{ijkl}^* = \frac{1}{y} B_{ijkl} + \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{y} \right) \frac{a_{ij} a_{kl}}{K}, \quad (11)$$

y – параметр пластичности, $y = t / \left[K (\bar{g} - \bar{g}^{(p)}) \right]$. Очевидно, что использование соотношения (11) позволяет провести линеаризацию системы определяющих уравнений.

Рассмотрим условия, обеспечивающие устойчивость процесса деформирования, которые связаны с положительной определенностью матрицы секущей податливости \bar{B}_{ij}^* ($i, j = 1, \dots, 6$), задаваемой матричным аналогом уравнения (11):

$$\bar{B}_{ij}^* = \frac{1}{y} B_{ij} + \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{y} \right) \frac{\bar{a}_i \bar{a}_j}{K},$$

где \bar{B}_{ij} и \bar{a}_i – матричные аналоги тензоров B_{ijkl} и a_{ij} . Необходимые и достаточные условия положительной определенности матрицы податливости заключаются в удовлетворении следующих неравенств:

$$\bar{B}_{11}^* > 0, \quad \bar{B}_{22}^* > 0, \quad \bar{B}_{66}^* > 0$$

$$\left| J_{12}^* \right| < 1, \quad \left| J_{23}^* \right| < 1, \quad \left| J_{13}^* - J_{12}^* J_{23}^* \right| < \sqrt{1 - J_{12}^{*2}} \sqrt{1 - J_{23}^{*2}}$$

причем $J_{ij}^* = \bar{B}_{ij}^* / \sqrt{\bar{B}_{ii}^* \bar{B}_{jj}^*}$, $! \Sigma_{ij}$ где $! \Sigma_{ij}$ – означает отсутствие суммирования по соответствующим индексам.

Ограничения, налагаемые на диагональные члены матрицы секущей податливости, приводят к следующим выражениям:

$$\frac{y}{j} > 1 - \frac{K}{E_i \bar{a}_i^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad ! \Sigma_i,$$

где E_i – модуль упругости материала в направлении i . Очевидно, что правая часть последнего неравенства всегда меньше нуля, следовательно оно не накладывает никаких дополнительных ограничений на параметры модели материала. К такому же выводу можно прийти, анализируя выражения, полученные путем тождественных преобразований

ограничений на величины J_{12}^* и J_{23}^* , соответственно,

$$\frac{y}{j} > 1 - K \frac{1 - m_1 m_2}{E_1 \bar{a}_1^2 + E_2 \bar{a}_2^2 + 2 E_1 m_1 \bar{a}_1 \bar{a}_2} \quad \text{и} \quad \frac{y}{j} > 1 - K \frac{1 - m_2 m_3}{E_2 \bar{a}_2^2 + E_3 \bar{a}_3^2 + 2 E_2 m_2 \bar{a}_2 \bar{a}_3}$$

Действительно, из условия положительной определенности матрицы упругой податливости вытекает

$$1 - m_1 m_2 > 0 \quad \text{и} \quad 1 - m_2 m_3 > 0,$$

а из определения аналога модуля всестороннего сжатия следует, что

$$\frac{K}{E_1 \bar{a}_1^2 + E_2 \bar{a}_2^2 + 2 E_1 m_1 \bar{a}_1 \bar{a}_2} > 1 \quad \text{и} \quad \frac{K}{E_2 \bar{a}_2^2 + E_3 \bar{a}_3^2 + 2 E_2 m_2 \bar{a}_2 \bar{a}_3} > 1$$

Преобразуя последнее из неравенств для J_{ij}^* , можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{y/j-1}{K} \left[\frac{\bar{a}_1^2}{E_2 E_3} (1 + m_{23} m_{32}) + \frac{\bar{a}_2^2}{E_1 E_3} (1 + m_{31} m_{13}) + \frac{\bar{a}_3^2}{E_1 E_2} (1 + m_{21} m_{12}) + \right. \\
 & \left. + 2 \frac{\bar{a}_1 \bar{a}_2}{E_2 E_3} (m_{21} + m_{31} m_{23}) + 2 \frac{\bar{a}_2 \bar{a}_3}{E_3 E_1} (m_{32} + m_{13} m_{12}) + 2 \frac{\bar{a}_3 \bar{a}_1}{E_1 E_2} (m_{13} + m_{21} m_{23}) \right] < \\
 & < \frac{1}{E_1 E_2 E_3} (1 - m_{32} m_{23} - m_{31} m_{13} - m_{21} m_{12} - 2 m_{21} m_{32} m_{13})
 \end{aligned}$$

а используя соотношения для компонентов матрицы упругости \bar{C}_{ij} , упростить его

$$-\frac{y/j-1}{K} (\bar{C}_{11} \bar{a}_1^2 + \bar{C}_{22} \bar{a}_2^2 + \bar{C}_{33} \bar{a}_3^2 + 2 \bar{C}_{12} \bar{a}_1 \bar{a}_2 + 2 \bar{C}_{23} \bar{a}_2 \bar{a}_3 + 2 \bar{C}_{31} \bar{a}_3 \bar{a}_1) < 1 .$$

С учетом выражения для аналога модуля всестороннего сжатия получим окончательный вид ограничения

$$y/j > 0 ,$$

которое, очевидно, выполняется всегда.

Распространяя предлагаемый подход на материалы, разносопротивляющиеся растяжению и сжатию, примем в качестве критерия растяжения или сжатия знак первого инварианта тензора деформаций I_{1e} . Кроме того, полагаем, что различие в поведении материала при растяжении и сжатии полностью определяется нелинейным характером деформирования, а не различием модулей упругости. Таким образом, компоненты тензора упругости не изменяются в зависимости от того, растягивается материал ($I_{1e} > 0$) или сжимается ($I_{1e} < 0$). Поэтому для анизотропного материала, обладающего различными диаграммами деформирования при растяжении и сжатии, обобщенная диаграмма деформирования (5) заменяется двумя обобщенными диаграммами

$$t^+ = F^+(\bar{g}^+) \quad \text{при} \quad I_{1e} > 0; \quad t^- = F^-(\bar{g}^-) \quad \text{при} \quad I_{1e} < 0 , \quad (12)$$

построенными отдельно для растяжения и сжатия, причем в общем случае $d\mathcal{A}^+/d\bar{g}^+ \neq d\mathcal{A}^-/d\bar{g}^-$ при $\bar{g} = 0$; знак "+" указывает, что соответствующие параметры относятся к растяжению, а знак "-" – к сжатию.

Построение обобщенной диаграммы деформирования осуществляется на основании информации, получаемой в результате одноосных испытаний на растяжение и сжатие в главных направлениях ортотропии при решении следующей системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}
 \sqrt{KB_{mmmm} - a_{mm}^2} s_{mm}^o = t_o , \quad m = 1, 2, 3 , \quad !\Sigma_m ; \\
 \sqrt{KB_{mnmn}} s_{mn}^o = t_o , \quad m, n = 1, 2, 3 , \quad m \neq n , \quad !\Sigma_{m,n} ; \\
 \sqrt{(C_{ijkl}/K - b_{ij} b_{kl})} e_{kl}^o e_{ij}^o = g_o , \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 ; \\
 K = C_{ijkl} a_{kl} a_{ij} ; \\
 a_{ij} a_{ij} = 1 ; \\
 b_{ij} = C_{ijkl} a_{kl} / K ; \\
 s_{ii}^o = f(e_{ii}^o) , \quad i = 1, 2, 3 , \quad !\Sigma_i
 \end{cases} \quad (13)$$

где $\epsilon_{ij}^o, s_{ij}^o, g_o, t_o$ – координаты характерных точек на диаграммах деформирования: заданных и искомых на одноосных и искомой на обобщенной, причем последние три уравнения системы задают одноосные диаграммы деформирования в главных направлениях ортотропии. Для учета поперечного деформирования материала система (13) должна рассматриваться совместно с системой уравнений (9). Выразим из первых двух уравнений системы (13) тензор a_{ij} и подставим его в уравнение для аналога модуля всестороннего сжатия. Эта операция позволит нам получить выражение для определения напряжения на трех диаграммах чистого сдвига. Запишем его, используя матричные обозначения:

$$\bar{C}_{ij} \sqrt{\left[\bar{B}_i^{dg} - \bar{B}_k^{dg} \left(\frac{\bar{s}_k^o}{\bar{s}_i^o} \right)^2 \right] \left[\bar{B}_j^{dg} - \bar{B}_k^{dg} \left(\frac{\bar{s}_k^o}{\bar{s}_j^o} \right)^2 \right]} - 1 = 0, \quad (14)$$

$$i, j = 1, 2, 3, \quad k = 4, 5, 6, \quad !\Sigma_k$$

где \bar{B}_i^{dg} – диагональный элемент матрицы \bar{B}_{ij} . Уравнение (14) налагает ограничения на сочетания характеристик исследуемого материала. Необходимым и достаточным условием существования решения (14) в полуинтервале

$$0 < \bar{B}_k^{dg} \left(\frac{\bar{s}_k^o}{\bar{s}_k^o} \right)^2 \leq D, \quad k \geq 4, \quad !\Sigma_k, \quad \text{где } D = \min_{i=1,2,3} \left[\bar{B}_i^{dg} \left(\frac{\bar{s}_i^o}{\bar{s}_i^o} \right)^2 \right]$$

является выполнение следующего неравенства

$$\bar{C}_{ij} \sqrt{\left[\bar{B}_i^{dg} - D / \left(\frac{\bar{s}_i^o}{\bar{s}_i^o} \right)^2 \right] \left[\bar{B}_j^{dg} - D / \left(\frac{\bar{s}_j^o}{\bar{s}_j^o} \right)^2 \right]} - 1 \leq 0. \quad (15)$$

Анализируя систему (13), можно предложить следующий алгоритм ее решения.

Для каждой точки на принятой за базовую диаграммы деформирования $s_{33}^o = f(\epsilon_{33}^o)$, выбираем какие-нибудь точки, располагающиеся на двух других одноосных диаграммах деформирования, при этом обязательно проверяется выполнение неравенства (15). Если оно не выполняется, то подыскивается другая пара точек на диаграммах $s_{11}^o = f(\epsilon_{11}^o)$ и

$s_{22}^o = f(\epsilon_{22}^o)$, а при его удовлетворении становится возможным определение обобщенных интенсивностей напряжений и деформаций. После этого вычисляются переменные коэффициенты поперечной деформации и определяются соответствующие обобщенной интенсивности деформаций новые значения напряжений на одноосных диаграммах деформирования – $s_{11}^{\prime o}$ и $s_{22}^{\prime o}$. Погрешность построения одной точки обобщенной диаграммы деформирования определяется следующей формулой:

$$V = \sqrt{\left[\left(\frac{s_{11}^o - s_{11}^{\prime o}}{s_{11}^o} \right)^2 + \left[\left(\frac{s_{22}^o - s_{22}^{\prime o}}{s_{22}^o} \right) \right]^2} \quad (16)$$

Для поиска приближенного решения системы уравнений (13), дополненной системой (9), предлагается искать минимум функции ошибок

$$V = V(\bar{s}_1^o, \bar{s}_2^o, j), \quad (17)$$

определяемой уравнением (16), с учетом ограничения

$$g(\bar{s}_1^o, \bar{s}_2^o) = 1 - \bar{C}_{ij} \sqrt{\left[\bar{B}_i^{dg} - D/(\bar{s}_i^o)^2 \right] \left[\bar{B}_j^{dg} - D/(\bar{s}_j^o)^2 \right]} \geq 0, \quad (18)$$

вытекающего из неравенства (15). В этом случае целевая функция определяется выражением

$$\bar{V}(\bar{s}_1^o, \bar{s}_{2,j}^o) = V(\bar{s}_1^o, \bar{s}_{2,j}^o) + P(\bar{s}_1^o, \bar{s}_{2,j}^o), \quad (19)$$

причем P – штрафная функция, $P = r/R(\bar{s}_1^o, \bar{s}_2^o)$, где r – весовой коэффициент, $0 < r \leq 1$, а

$$R(\bar{s}_1^o, \bar{s}_2^o) = \begin{cases} g(\bar{s}_1^o, \bar{s}_2^o) & \text{при } g(\bar{s}_1^o, \bar{s}_2^o) > \chi \\ \left[1/\chi + |g(\bar{s}_1^o, \bar{s}_2^o) - \chi|/\chi^2 \right]^{-1} & \text{при } g(\bar{s}_1^o, \bar{s}_2^o) \leq \chi \end{cases}$$

где χ – малое число, определяемое точностью расчетов.

Необходимым и достаточным условием существования минимума функции ошибок является равенство нулю ее градиента $\nabla \bar{V}(\{x^*\}) = 0$ и положительная определенность гессиана $\nabla^2 \bar{V}(\{x^*\}) \geq 0$ в искомой точке. Поиск минимума функции ошибок будем производить с помощью модифицированного метода Ньютона [4], причем величина ньютоновского шага $\{s\}$ из некоторой точки $\{x_c\}$ определяется путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\left[\nabla^2 \bar{V}(\{x_c\}) + k_c I \right] \{s\} = -\nabla \bar{V}(\{x_c\}), \quad (20)$$

где I – единичная матрица, а k_c – коэффициент, который равен нулю при положительной определенности гессиана, и в противном случае выбирается таким, чтобы обеспечить надежную положительную определенность матрицы системы (20).

В настоящей работе для определения k_c используется алгоритм, основанный на разложении Холесского и приведенный в монографии [4]. Для обеспечения поиска локального экстремума целевой функции (20) из практически любой точки начального приближения используется стратегия линейного поиска [4], предусматривающая сначала выполнение полного ньютоновского шага $\{x_+\} = \{x_c\} + \{s\}$, с последующим его дроблением за счет уменьшения параметра l ($0 < l < 1$): $\{x_+\} = \{x_c\} + l \{s\}$.

Экстремальное значение параметра l определяется на базе кубической модели, построенной по значениям функции и производной на концах интервала $[0, l]$:

$$\hat{\bar{V}}(l) \stackrel{\Delta}{=} \bar{V}(\{x_c\} + l \{s\}) \approx d^3 + bl^2 + cl + d$$

Значение аргумента, обеспечивающего минимум кубической модели, определяется из уравнения

$$3d^2 + 2bl + \hat{\bar{V}}'(0) = 0$$

причем "штрих" обозначает операцию дифференцирования.

Найденное таким образом значение l_{min} используется для получения нового приближения $\{x_+\} = \{x_c\} + l_{min} \{s\}$, допустимость которого оценивается с помощью условия [4]:

$$\bar{V}(\{x_+\}) \leq \bar{V}(\{x_c\}) + n l_{min} \nabla \bar{V}(\{x_c\})^T \{s\},$$

где $n \in (0, 1)$.

Для отыскания глобального минимума будем использовать стратегию мульти-старта, которая заключается в повторении процесса поиска локального минимума для нескольких точек начального приближения, расположенных, в данном случае, равномерно в физически достоверной области определения функции ошибок. При этом в качестве глобального минимума рассматривается наименьший из найденных локальных.

Рассмотренный выше алгоритм был реализован при создании комплекса программ, предназначенного для построения параметров модели неупругого деформирования анизотропных разносопротивляющихся растяжению и сжатию материалов на основе углерода. С его помощью были обработаны результаты испытаний разнообразных УУКМ и графитов как отечественного, так и зарубежного производства. Так на рис.1а и б приведены диаграммы деформирования УУКМ AVCO-Mod.3a [5] при растяжении и сжатии, соответственно. На рисунке позицией 1 отмечены экспериментальные диаграммы деформирования в плоскости укладки слоев этого трансверсально-изотропного материала, а позиция 2 соответствует экспериментальным диаграммам в направлении, перпендикулярном этой плоскости. Расчетные обобщенные диаграммы деформирования обозначены позицией 3, а расчетные диаграммы сдвига в плоскости слоев и в перпендикулярной плоскости — позициями 4 и 5, соответственно. На этом же рисунке пунктирными линиями проведены экспериментальные диаграммы чистого сдвига в плоскости укладки слоев (позиция 6) и в перпендикулярной плоскости (позиция 7), причем совпадение расчетных и экспериментальных кривых для случая растяжения может быть признано удовлетворительным. Следует отметить, что выбор в качестве примера УУКМ AVCO-Mod.3a объясняется не столько относительной доступностью и изученностью его механических характеристик, сколько тем, что этот материал представлял, пожалуй, наибольшую трудность при построении обобщенных диаграмм деформирования.

На рис.2 представлены результаты численного решения [6] задачи о циклическом нагружении полого анизотропного цилиндра, изготовленного из УУКМ AVCO-Mod.3a и находящегося в условиях плоского деформированного состояния. Здесь же приведены расчетная схема, значения давлений для десяти шагов нагружения и обобщенные диаграммы деформирования материала при растяжении (кривая А) и сжатии (кривая В), где цифрами помечены точки, соответствующие напряженному состоянию на внутренней (со штрихом) и на внешней (с двумя штрихами) поверхностях цилиндра.

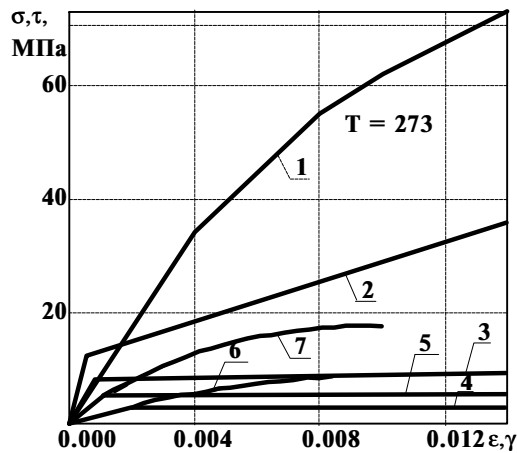
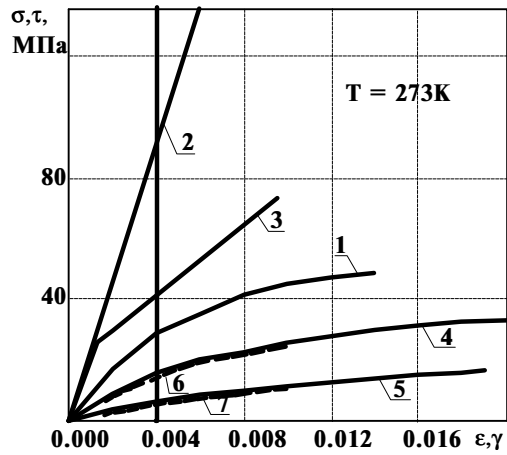


Рис. 1.

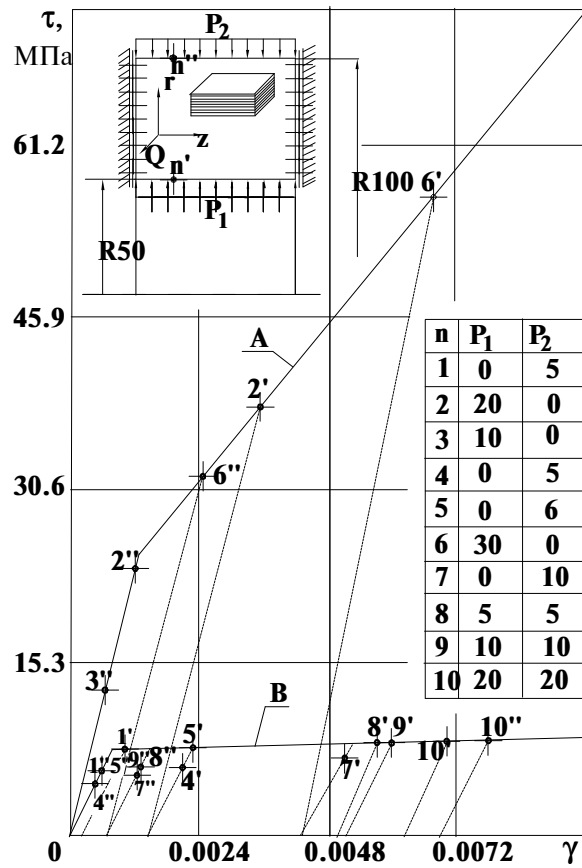


Рис. 2.

Литература

1. Макалистер Л., Лакман У. Многонаправленные углерод-углеродные композиты}. – В кн.: Прикладная механика композитов. – М.: Мир, 1989. – С.226-294.
2. Геогджаев В.О., Осокин А.Е., Перлин П.И. Об одном подходе к решению задач упругопластического деформирования анизотропной среды // Доклады АН СССР. – 1981. – Т. 261, N 5. – С.1082-1085.
3. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н. Описание нелинейного деформирования ортотропных материалов // Изв. вузов. Машиностроение. – 1988. – N 6. – С.19-22.
4. Дэннис Дж., Шнайбель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 440 с.
5. Джонс Р.М. Моделирование нелинейной деформации композиционных материалов углеродное волокно-углерод // Ракетная техника и космонавтика. – 1980. – Т.18, N 8. – С.166-175.
6. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н., Чепак А.В. Программный комплекс "ORTOPLASCON" // Тезисы докл. Всесоюз. выст. программных комплексов по числ. реш. задач термомеханики. – М.: Изд. МГТУ, 1990. – С.15.