Нелинейная динамика механических систем при случайном воздействии

Ю.С.Павлюк, В.Д.Сакулин

Челябинский государственный технический университет

Исследовалось влияние некоторых особенностей нелинейных динамических систем, подверженных случайному воздействию, на характеристики их состояния. Проведены количественные оценки влияния искажений спектральной плотности процессов, вносимых нелинейными элементами и отклонений формы плотности распределения вероятностей от гауссовской на результаты анализа колебаний механических систем. Описаны условия появления неустойчивых режимов колебаний механических систем, обусловленных нелинейностью упругих элементов. Сформулированы рекомендации по использованию результатов исследования при оценке нагруженности систем.

Модель механической системы называют нелинейной, если нелинейны соотношения, описывающие процессы ее движения, в частности, если хотя бы одна из обобщенных сил нелинейно связана с обобщенными координатами или обобщенными скоростями [1]. Практически все реальные механические системы обладают нелинейными свойствами в той или иной степени. В ряде случаев, однако, влияние нелинейности может быть пренебрежимо мало, тогда для описания системы можно пользоваться упрощенными линейными моделями и соответствующими линейными теориями. Следовательно, при выборе той или иной модели для описания движения динемической системы необходимо располагать информацией о том, как скажется на характеристиках состояния системы влияние нелинейных связей и ряда особенностей присущих только нелинейным моделям. Это позволяет избежать ошибок при оценке характеристик состояния системы и выборе метода исследования.

Методы исследования колебаний нелинейных систем при случайном возмущении

Исследование нелинейных случаных колебаний представляет большие трудности. Точных методов решения статистических задач для любых нелинейных динамических систем, основанных на использовании законов распределения или моментов высших порядков случайных входных возмущений, в настоящее время еще не разработано. Лишь некоторые частные задачи удается решить в точной постановке и в замкнутом виде. Методы, позволяющие получить точное решение нелинейных задач, основаны на теории марковских процессов. В основе их лежит тот факт, что совместные плотности вероятностей переменных состояния динамических систем с широкополосными случайными возмущениями при определенных условиях удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям в частных производных (уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК)) [2].

Решение уравнений ФПК определяет плотность распределения вероятностей выходных процессов динамической системы. Аналитическое решение полного (нестационарного) уравнения ФПК для нелинейных систем оказывается весьма затруднительным. Практически все аналитические решения, полученные для нелинейных систем, ограничиваются решением стационарного уравнения ФПК, соответствующего уравнению колебаний динамической системы с одной степенью свободы и внешнему воздействию типа "белый шум". Увеличение числа переменных состояния системы резко увеличивает трудности получения аналитического решения уравнения ФПК и приводит к необходимости его численного исследования. При этом, однако, решение переходит уже в разряд приближенных [3].

Точные аналитические решения играют важную роль контрольных решений, по которым можно проверять и оценивать точность различных приближенных методов и процедур моделирования на ЭВМ.

Из приближенных методов решения нелинейных задач, пожалуй, наиболее универсальным является метод статистического моделирования, сводящийся к генерации последовательности реализаций исходных случайных процессов возмущающего воздействия, к функциональному преобразованию их в соответствии со структурой моделируемой системы и, наконец, к статистической обработке последовательности реализаций на выходе системы.

Существует несколько типов алгоритмов, при помощи которых на ЭВМ могут вырабатываться реализации возмущаюшего воздействия. Один из алгоритмов предусматривает вычисление дискретной последовательности значений выходного возмущения, коррелированного по **заданному** закону (виду корреляционной функции). В основу его положено линейное преобразование стационарной последовательности независимых гауссовских чисел с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Для образования последовательности случайных чисел существуют стандартные программы, включенные в математическое обеспечение ЭВМ [4].

Существуют более экономичные алгоритмы, основанные на представлении моделируемых процессов возмущающего воздействия в виде разложений по неслучайным функциям времени. Одним из таких вариантов является каноническое разложение [5]. При этом случайная функция представляется в виде конечной суммы детерминированных функций с коэффициентами, являющимися независимыми между собой случайными величинами. Основным недостатком канонического разложения является то, что для достаточно точного представления случайной функции требуется использовать большое число случайных коэффициентов. В работе [6] описывается другая форма представления случайной функции - неканоническое разложение, отличающееся тем, что для ее моделирования используется всего два или три вспомогательных случайных коэффициента. Это представление обеспечивает тождественность случайной функции и ее моментов второго порядка, т.е. в рамках корреляционной теории случайная функция и ее неканоническое представление отождествляются [6].

К сожалению, использование разложений случайного процесса по неслучайным функциям при моделировании входных возмущений может приводить к существенным погрешностям при вычислении статистических характеристик производных случайных процессов, необходимых для оценки вибропрочности упругих конструкций [7]. Это вызвано тем, что набор конечного числа детерминированных функций на основе разложений входного процесса приводит к замене реального непрерывного спектра воздействия приближенным дискретным, у которого могут отсутствовать составляющие воздействия на резонансных частотах динамической системы. Это и приводит к искажениям реакции динамической системы.

К числу приближенных методов анализа поведения нелинейных динамических систем при случайном возмущении относится и метод возмущений, основная идея которого состоит в представлении решения в виде ряда по степеням некоторого малого параметра, характеризующего уровень нелинейности [1]. Подставляя принятое выражение для решения в исходные уравнения и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра нелинейности, приходим к системе линейных дифференциальных уравнений относительно членов ряда. Приближение первого порядка находится из решения двух линейных систем. Первая система получается при отбрасывании всех нелинейностей в исходной задаче, а вторая система содержит правую часть (возмущения), которая является функцией решения первой системы. Наибольшие трудности в использовании этого метода возникают при решении именно системы уравнений для поправок первого порядка, т.к. возмущающие воздействия, входящие в эту систему, не являются гауссовскими. В силу этого обстоятельства, практически не удается выйти за пределы первого приближения, если не считать весьма тривиальных случаев.

Для исследования колебательных систем со слабыми нелинейностями часто используют асимптотический метод Крылова-Боголюбова [1], суть которого заключается в переходе от исходных уравнений, описывающих изменение текущих координат системы во временной области к уравнениям первого порядка, описывающих изменение амплитуд и фаз выходного процесса ("медленных" переменных). При условии слабой нелинейности и малости воздействия, совместное изменение амплитуд и фаз здесь может рассматриваться как марковский процесс даже в том случае, когда выходной процесс заведомо не является марковским. При этом, однако, необходимо, чтобы время корреляции входного процесса было мало по сравнению с характерным временем системы (периодом колебаний)

Полученной системе уравнений "медленных" переменных ставится в соответствие уравнение Фоккер-Планка-Колмогорова и находится его решение. Однако, в общем случае, при нахождении аналитического решения уравнений ФПК встречаются существеннные затруднения.

Наиболее распространенным методом анализа нелинейных систем при случайном возмущении является метод статистической линеаризации [1,8...10]. основанный на замене нелинейных функций, входящих в дифференциальные уравнения системы, некоторыми линейными функциями, которые в определенном смысле статистически эквивалентны исходному нелинейному преобразованию. Обычно требуется, чтобы входные процессы исходного и линеаризованного элемента имели равные математические ожидания и дисперсии, либо средние квадратические значения отклонения процессов.

При замене нелинейных элементов их линейными эквивалентами система оказывается линейной, и для ее анализа становится возможным использование любого метода, справедливого для линейных систем. Поскольку коэффициенты в уравнении линеаризованной системы зависят от статистических характеристик выходного процесса, решение системы приходится получать с помощью итераций. Сходимость такой процедуры обычно оказывается весьма быстрой.

Метод статистической линеаризации широко используется при анализе существенно нелинейных систем [9...21] и дает приемлемые результаты. Однако, в некоторых случаях использование в расчетах метода статистической линеаризации может приводить к ошибочным результатам, если не учитывать при проведении расчетов особенности нелинейных моделей.

Анализ этих особенностей удобно проводить на основе метода корреляций. Этот метод предусматривает составление детерминистических уравнений относительно моментных фуекций первого и второго порядка переменных состояния динамической системы непосредственно на основании стохастических уравнений движения этой системы [8,21...23].

Ключевым вопросом при использовании метода корреляций является задание условий замыкания системы уравнений отосительно моментов различных порядков, которые бы обеспечивали разумную точность получаемых результатов. Принимается допущение о том, что моменты более высоких порядков в данном уравнении выражаются определенным образом через моменты низших порядков.

Сравнение с точными решениями для некоторых нелинейных систем показывают, что метод корреляций в сочетании с гипотезой нормальности позволяет иногда получать достаточно точные результаты даже и при значительных уровнях нелинейности [2].

Особенности нелинейных моделей

Наличие в системе нелинейных элементов вносит некоторые особенности в исследование ее колебаний.

Во-первых, нелинейные системы не подчиняются принципу суперпозиции, который широко применяется для исследования линейных систем. В этом главное отличие свойств нелинейных систем от свойств линейных. Этим свойством можно воспользоваться в качестве критерия при экспериментальной проверке линейности конкретной механической системы [1].

Другой существенной особенностью нелинейных механических систем является возможная неустойчивость решений, т.е. формальная возможность существования нескольких решений, характеризующих состояние системы при заданных значениях ее параметров и параметров возмущающего воздействия [1, 2]. Поэтому при исследовании колебаний таких систем возникает проблема оценки возможности существования нескольких состояний системы, отбора действительно реализуемых состояний или оценки вероятности появления того или иного состояния, так как наличие того или иного состояния может сказаться на динамической прочности системы.

К особенностям нелинейных систем можно отнести также изменение формы спектральной плотности и плотности распределения вероятностей случайного процесса безынерционным нелинейным элементом [1,21,22,24]. Изменение спектральной плотности происходит в сторону увеличения доли высокочастотной составляющей. Это может оказать влияние на результаты оценки нагруженности отдельных подсистем конструкции. Их значения будут зависеть в данном случае от соотношения между спектром собственных частот подконструкции и полосой существенных частотных искажений, вносимых нелинейными элементами подрессоривания этих подконструкций.

Особенностью механических систем, содержащих демпферы сухого трения, является возможность изменения в процессе колебаний структуры системы, обусловленную блокированием (залипанием) демпферов. Блокирование возникает в тех случаях, когда динамические реакции связей в системе меньше сил сухого трения

Исследование особенностей проводилось на примере анализа динамики моделей транспортных систем.

Искажение спектральной плотности процесса нелинейным безынерционным элементом

Необходимость учета искажений спектральной плотности связана с решением задач анализа изгибных колебаний несущих

конструкций, а так же при разработке виброизоляции элементов конструкции (блоков аппаратуры, элементов автоматики) при транспортировке.

Для оценки степени искажения спектральной плотности рассматриваются решения уравнений, описывающих колебания транспортной системы с нелинейной упругой характеристикой подвески

$$\ddot{y} + 2h\dot{u} + \omega_o^2\left[u + \gamma\varphi(u)\right] = 0, \quad u = y - \frac{1}{k_o}\sum_{i=1}^{k_o} q_i \tag{1}$$

и колебания железнодорожного агрегата с демпферами сухого трения

$$\ddot{y} + \gamma\,\mathrm{sign}\,\dot{u} + \omega_o^2 u = 0, \quad u = y - \frac{1}{k_o}\sum_{i=1}^{k_o} q_i \tag{2}$$

где $q_i(t) = q(t - \tau_i)$, $q(t)$ - стационарный эргодический гауссовский процесс, τ_i - время запаздывания воздействия на i -й вход, ω_o, h, γ - действительные положительные постоянные, $\varphi(u)$ - нелинейный упругий элемент.

Расчет характеристик случайного процесса $y(t)$ ведется для установившегося режима колебаний.

Решение уравнения (1), полученное методом корреляций, записывается в следующем виде: при $\varphi(u) = u^3$

$$R_{\ddot{y}}(\tau) = 4h^2 R_{\dot{u}}(\tau) + d^4 R_u(\tau) + 6\omega_o^4\gamma^2 R_u^3(\tau), \quad d^2 = \omega_o^2\left(1 + 3\gamma D_u\right) \tag{3}$$

и при $\varphi(u) = \operatorname{sign} u$

$$R_{\ddot{y}}(\tau) = 4h^2 R_{\dot{u}}(\tau) + \omega_o^2\left[d^2 R_u(\tau) + \frac{2}{\pi}\omega_o^2\gamma^2 \arcsin\frac{R_u(\tau)}{D_u}\right],$$

$$d^2 = \omega_o^2\left(1 + 2\gamma\sqrt{\frac{2}{\pi D_u}}\right) \qquad (4)$$

а уравнения (2) - в виде

$$R_{\ddot{y}}(\tau) = \omega_o^4 R_u(\tau) + \frac{2}{\pi}\gamma^2 \arcsin\frac{R_{\dot{u}}(\tau)}{D_{\dot{u}}}. \qquad (5)$$

Используя преобразование Фурье корреляционной функции $R_{\ddot{y}}(\tau)$, вычислялась спектральная плотность $\Phi_{\ddot{y}}(\omega)$ процесса $\ddot{y}(t)$. Сравнение ее со спектральной плотностью $\Phi_{\ddot{y}}^{л}(\omega)$, вычисленной для тех же систем методом статистической линеаризации, показало, что здесь наблюдается увеличение высокочастотной составляющей спектральной плотности и тем больше, чем выше степень нелинейности системы (рис.1).

Уровень искажений зависит также от вида нелинейной функции Так, например, уровень искажений в системе со знаковой функцией $\varphi(u) = \operatorname{sign} u$ на порядок выше, чем с кубической.

В то же время значение дисперсии ускорений $D_{\ddot{y}}$, вычисленной с учетом нелинейных искажений, отличается незначительно от полученной методом статистической линеаризации. Разница не превышает 20% даже для больших значений параметров, характеризующих степень нелинейности ($d/\omega_o = 1.5$, $k_1 = \gamma/\omega_o^2\sqrt{D_u} = 1$).

Спектральная плотность $\Phi_{\ddot{y}}(\omega)$ исследуемых систем вычислялась еще и методом статистического моделирования. Полученные результаты хорошо согласуются с решениями метода корреляций.

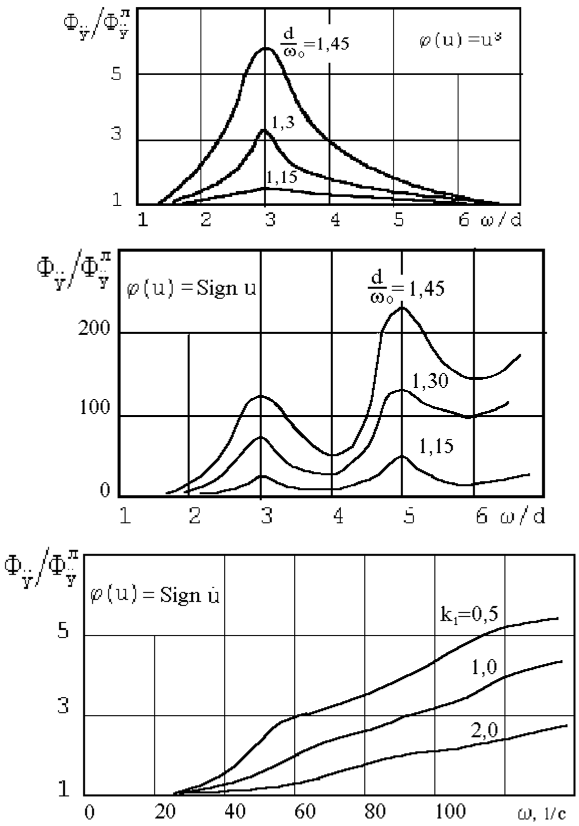

Рис. 1

Устойчивость режимов колебаний нелинейных систем

В нелинейных механических системах оказывается возможным существование неустойчивых колебательных режимов. Переход системы из одного устойчивого состояния в другое сопровождается резким изменением амплитуды колебаний.

Параметры системы и воздействия, при которых оказывается возможным резкое изменение интенсивности колебательного процесса, определяются здесь для колебательной системы, описываемой уравнением (1). В качестве внешнего воздействия рассматриваются узкополосный и широкополосный случайные процессы. При воздействии узкополосного возмущения, описываемого корреляционной функцией

$$R_q(t) = D_q e^{-a|t|}\left(\cos bt + \frac{a}{b}\sin b|t|\right) \quad (6)$$

решение уравнения (1) для дисперсии относительного перемещения, полученное методом статистической линеаризации, записывается в виде

$$D_u = D_q \frac{n^2}{\Delta}\left(ad^2 - hn^2\right). \quad (7)$$

Здесь n и Δ являются функциями параметров системы и воздействия, а d^2 - коэффициент статистической линеаризации, являющийся функцией D_u. Для системы с кубической нелинейностью соотношение (7) сводится к кубическому уравнению относительно дисперсии и, следовательно, в зависимости от значений параметров нелинейной системы и возмущающего воздействия, может иметь три действительных решения.

Исследование показало, что с увеличением демпфирования системы и расширением спектра возмущения, область существования нескольких решений уменьшается.

Для системы с нелинейной функцией $j(u) = \mathrm{sign}\, u$ соотношение (7) сводится к уравнению, решение которого оказывается единственным при любых значениях параметров системы и воздействия.

При воздействии широкополосного возмущения типа "белый шум", решение $D_u = S_o / 4hd^2$ становится единственным для системы с любыми параметрами.

Наличие переходов системы из одного режима колебаний в другой существенно сказывается на форме плотности распределения вероятностей моделируемого процесса [24,26]. Плотность распределения становится бимодальной, когда оба режима колебаний системы представлены в процессе в равной мере, и приближается к одномодальной в случае преобладания одного из них.

Использование метода статистической линеаризации для анализа таких систем позволяет определить только статистические характеристики возможных режимов колебания, но остается неизвестной вероятность существования того или иного режима, оценка которой является самостоятельной сложной задачей.

Искажение формы плотности распределения вероятностей

Преобразование нелинейной системой случайного процесса сопровождается изменением его плотности распределения вероятностей. Количественные оценки таких изменений и влияние их на результаты расчета колебаний нелинейных систем в литературе не приводятся. Это снижает уверенность в правильности получаемых результатов и вынуждает проводить массу дополнительных проверок и уточнений.

Оценка уровня изменений формы плотности вероятностей проводилась на примере решения уравнения (1) с нелинейными функциями $j(u) = u^3$ и $j(u) = \mathrm{sign}\, u$. Для этих уравнений были получены зависимости, точно описывающие плотность распределения вероятностей процесса на выходе. Сравнение их с соответствующими решениями, полученными методом статистической линеаризации (гауссовским распределением) показало, что, что изменение формы плотности вероятностей невелико, даже при больших значениях параметра d/w_o, характеризующего степень нелинейности системы. На рис.2а приведены графики плотностей вероятностей, полученные для уравнения (1) с нелинейной фунецией $\varphi(u) = u^3$ (штриховая линия соответствует точному решению), а на рис.2б - для уравнения с нелинейной функцией $\varphi(u) = u^3$.

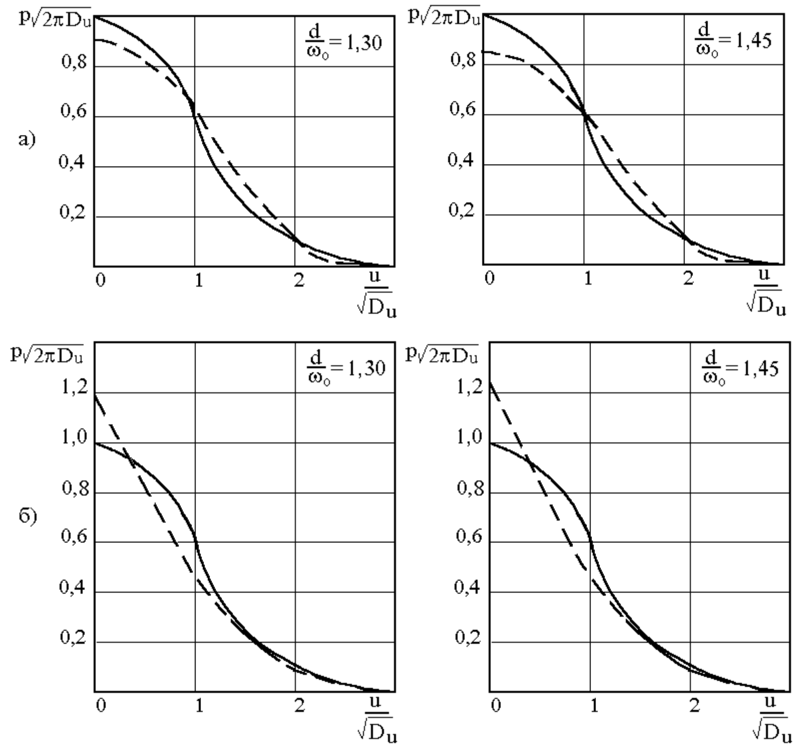

Рис. 2

Имеющиеся отклонения плотности вероятностей от гауссовской, соответствующей решению системы методом статистической линеаризации, практически не влияют на значения характеристик выходного процесса - математического ожидания, дисперсии, коэффициентов разложения корреляционной функции.

Значения коэффициентов статистической линеаризации оказываются мало чувствительны к изменениям формы плотности вероятностей случайного процесса. Следовательно, требование гауссовости процесса при расчетах систем с симметричными нелинейными функциями методом статистической линеаризации не является обязательным.

Изменение структуры механической системы с демпферами сухого трения

При исследовании колебаний нелинейных механических систем, содержащих в своей структуре демпферы сухого трения, необходимо учитывать возможность их блокирования. Это явление характерно для железнодорожных транспортных агрегатов. На некоторых скоростях движения их рессорные комплекты оказываются заблокированными и колебания кузова происходят только за счет податливости металлоконструкций тележек.

При блокировании упругих связей динамические свойства системы существенно изменяются. Поэтому для анализа колебаний системы с заблокированными связями необходимо использовать различные схемы. Необходимость расчета по той или иной схеме определяется условием блокирования упругих элементов.

Получить условие блокирования можно из анализа уравнения колебаний нелинейной системы с демпфером сухого трения (2).

Решение этого уравнения для дисперсии $D_{\ddot{y}}$ записывается в следующем виде

$$D_{\ddot{y}} = \omega_o^4 D_u + \gamma^2. \quad (8)$$

В случае, когда происходит блокирование упругого элемента, относительное перемещение $u(t)$ становится невозможным, т.е. $D_{\text{u}} = 0$, тогда условие блокирования представляется выражением

$$D_{\ddot{y}} < g^2. \qquad (9)$$

При значениях дисперсии ускорения системы $D_{\ddot{y}}$, больших g^2, упругий элемент будет разблокирован.

При использовании условия блокирования (9) необходимо располагать значениями дисперсии ускорения системы на выходе, т.е. предварительно провести анализ ее колебаний. Более того, анализ нужно проводить для режимов колебания системы и с заблокированными и с разблокированными упругими связями, поскольку достоверное заключение о возможном блокировании связей можно получить только из сопоставления результатов этих двух расчетов.

Если оказывается, что значения дисперсии ускорения системы с заблокированными $D_{\ddot{y}}^{\text{ç}}$ и с разблокированными связями $D_{\ddot{y}}^{\text{ð}}$ меньше g^2, то системы нужно рассматривать с заблокированными упругими связями. Если оба значения $D_{\ddot{y}}^{\text{ç}}$ и $D_{\ddot{y}}^{\text{ð}}$ оказываются больше g^2, то систему нужно рассматривать с разблокированными упругими связями. Если одно из значений дисперсии оказывается больше, а другое меньше g^2, то связи будут как бы частично заблокированы, т.е. в процессе колебаний системы будут присутствовать оба режима - колебания с заблокированными и разблокированными упругими связями, постоянно сменяющие друг друга. В этом случае значение дисперсии ускорения системы находится между значениями дисперсии, соответствующими режиму колебаний с заблокированными ($D_{\ddot{y}}^{\text{ç}}$) и с разблокированными $D_{\ddot{y}}^{\text{ð}}$ упругими связями. Деформации упругих связей при таком режиме колебаний оказываются невелики и приближенно можно считать их равными нулю ($D_{\text{u}} = 0$). Тогда (согласно (8)) для такого режима движения значение дисперсии ускорения можно принять равным g^2.

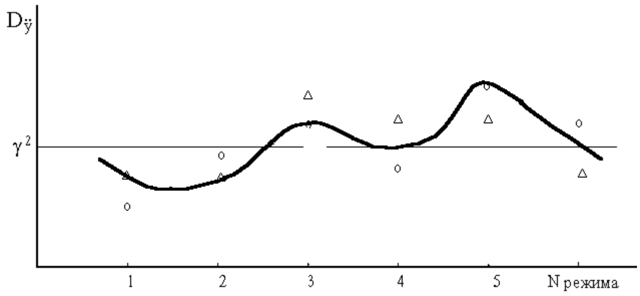

Рис.3

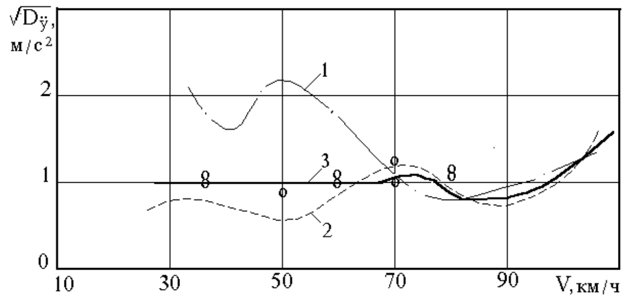

Рис. 4

Применение описанного подхода к анализу результатов расчета проиллюстрировано рис.3, где приведены все возможные соотношения значения g^2 и дисперсий ускорения системы с заблокированными (обозначенными символом Δ) и разблокированными (обозначенными символом **о**) упругими связями и результаты анализа этих соотношений (сплошная линия).

На рис.4 приведены результаты расчета крупногабаритной конструкции, расположенной в 8-осном транспортном агрегате. Кривая 1 на рис.4 соответствует результатам расчета системы с заблокированными упругими связями, кривая 2 - с разблокированными упругими связями, кривая 3 соответствует результирующим значениям, определяющим нагруженность конструкции, а знком **о** отмечены значения $\sqrt{D_{\ddot{y}}}$ исследуемой конструкции, полученные экспериментально. Из сравнения результатов, полученных для режимов колебания на заблокированных и разблокированных рессорных комплектах видно, что расчет нагруженности только для модели с разблокированными рессорными комплектами приводит порой к получению результатов заниженных почти на 30%. Кроме того, из анализа результатов расчета следует, что для 8-осного транспортного агрегата характерными являются колебания с кратковременными повторяющимися включениями в работу рессорных комплектов.

Решение задач нелинейной статистической динамики механических систем с учетом особенностей моделей

Широко распространенный метод статистической линеаризации характеристик нелинейных связей механических систем позволяет успешно решать целый круг задач анализа нелинейных систем, в том числе и оценки вибронагруженности транспортируемых конструкций. Однако, использование линеаризации неизбежно приводит к потере ряда особенностей, присущих только нелинейным системам, что может способствовать принятию ошибочных заключений о нагруженности конструкций.

Тем не менее, учет этих особенностей при использовании метода статистической линеаризации позволяет повысить точность получаемых результатов.

Исследования особенностей колебания нелинейных систем показали, что:

1) при анализе колебаний железнодорожных транспортных агрегатов с демпферами сухого трения необходимо учитывать возможное изменение структуры расчетной модели, обусловленное блокированием упругих связей. Условием блокирования является непревышение реакциями связей сил сухого трения. Для выработки заключения о нагруженности таких систем расчеты нужно проводить для режимов колебания и с заблокированными и с разблокированными упругими связями. По их результатам определяется режим колебания системы и соответствующие этому режиму характеристики нагруженности изделия;

2) неустойчивость режимов колебания в нелинейных слабодемпфированных системах проявляется только при узкополосном возмущающем воздействии и жесткой упругой характеристике нелинейных связей. С увеличением широкополосности спектральной плотности воздействия и характеристик рассеяния энергии колебаний, возможность появления скачкообразных переходов системы из одного режима колебания в другой уменьшается. Для воздействия, представленного белым шумом, характерным для железнодорожных транспортных агрегатов, это явление отсутствует в любых нелинейных системах. Оценку возможности появления неустойчивых режимов колебаний при расчете вибронагруженности конструкций необходимо проводить лишь в отдельных случаях, когда конструкция размещается на дополнительных нелинейных амортизаторах или используется нелинейная амортизация для элементов конструкции. Неустойчивые режимы колебаний в таких системах можно устранить путем соответственного подбора параметров, их диссипативных и упругих характеристик;

3) искажение формы спектральной плотности, обусловленное нелинейным преобразованием рессорными комплектами агрегата возмущающего воздействия, слабо влияет на характеристики нагруженности конструкции, если рассматривать ее колебания как твердого тела, однако может существенно сказаться на результатах оценки виброактивности ее изгибных колебаний или результатах оценки колебаний элементов изделия, если их частотная характеристика находится в зоне существенных искажений спектра. Поэтому вклад этих составляющих колебаний в общую характеристику нагруженности элементов изделия нужно корректировать в соответствии с величиной, определяемой видом нелинейной функции и степенью нелинейности связей (см. рис.1);

4) можно не учитывать изменение формы плотности вероятностей процесса при оценке нагруженности транспортируемых конструкций, поскольку даже существенные

отклонения ее от гауссовской слабо влияют на значения интегральных характеристик колебания системы.

Литература

1. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. - М.: Машиностроение, 1979.Т.2. Колебания нелинейных механических систем. -1979. - 351с.
2. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. - 368с.
3. Маланин В.В., Полосков И.Е. Практическая реализация некоторых методов решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова // Проблемы механики управляемого движения: Межвузовский сб. науч. тр. - Пермь: ПГУ, 1985. - С. 88-96. -1979. - 351с.
4. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. - М.: Машиностроение, 1979.Т.1. Колебания линейных систем. -1978. - 352с.
5. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. - М.: Физматгиз, 1962. - 883с.
6. Чернецкий В.И. Анализ точности нелинейных систем управления. - М.: Машиностроение, 1968. - 246с.
7. Осолотков И.П. О некоторых вычислительных особенностях интерполяционного метода при анализе случайных колебаний нелинейных механических систем // Динамика и прочность конструкций: Тематический сб. науч.тр. - Челябинск: ЧПИ, 1979. -С. 34-40.
8. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. - М.: Стройиздат, 1971. - 256с.
9. Казаков И.Е. Статистические методы проектирования систем управления. - М.: Машиностроение, 1969. - 262с.
10. Crandall S.H. On statistical linearization for nonlinear oscillators // Problem of the Asymptotic Theory of Nonlinear Oscillators. - Kiev: Nauk. Dumka, 1977. - P. 115-122.
11. Ушкалов В.Ф., Резников Л.М., Редько С.С. Статистическая динамика рельсовых экипажей. К.: Наукова думка, 1982. - 360с.
12. Николаенко Н.А., Ульянов С.В. Статистическая динамика машиностроительных конструкций. -М.: Машиностроение, 1977. -368с.
13. Тарасик В.П. Проектирование колесных тягово-транспортных машин. - Мн.: Выш.шк., 1984. - 163с.
14. Жильцов К.К. Приближенные методы расчета систем с переменной структурой. - М.: Энергия, 1974. - 224с.
15. Broersen R.M.T. Estimation of parameters of non-linear dynamical systems // Int. J. Non-Linear Mechanics. - 1974 Vol.9, No.5 - P.355-361.
16. Crandall S.H. Nonlinear problems in random vibration // VII Int. konferenz uber nichtlinear schwingungen, Band II.- DDR, Berlin, 1977. - Nr.5. - P.215-224.
17. Crandall S.H., Zhu W.Q. Random vibration: a survey of recent developments // Transactions of the ASME. J. of Applied Mechanics. - 1983. - Vol. 50, No.4. - P.955-962.
18. Apetaur M., Opisca F. Linearization of non-linear stochastically excited dynamic systems // J. of Sound and Vibration. - 1983. - Vol.86, No.4. - P.563-585.
19. Iyenger R.N. Random Vibration of a second order nonlinear elastic system // J. of Sound and Vibration. - 1975. - Vol.40, No.2. - P.155-165.
20. Гусев А.С., Светлицкий В.А. Расчет конструкций при случайных воздействиях. - М.: Машиностроение, 1984. - 240с.
21. Макеев В.П., Гриненко Н.И., Павлюк Ю.С. Статистические задачи динамики упругих конструкций. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. - 232с.
22. Gelb A., Warren R.S. Direct statistical analysis of nonlinear systems. // J. AIAA. - 1973. - Vol.11, No.5. - P.689-694.

23. Пупков К.А. Статистический расчет нелинейных систем автоматического управления. - М.: Машиностроение, 1965. - 404с.
24. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. - М.: Сов. радио, 1969. - 752с.
25. Первозванский А.А. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. - М.: Наука, 1962. - 351с.
26. Макаров Б.П. Нелинейные задачи статистической динамики машин и приборов. - М.: Машиностроение, 1983. - 264с.