

# Восстановление вибрационного поля конструкций по показаниям вибродатчиков

Ю.Н.Самогин, В.П.Чирков

Московский энергетический институт (технический университет)

При оценке технического состояния конструкций энергетического оборудования помимо контроля различных физических параметров часто используют информацию об уровне измеряемых вибраций. В этом случае в качестве диагностических признаков выступают различные вибрационные характеристики колебательных процессов, фиксируемых в ограниченном числе точек и доступных для организации виброизмерений. Однако очень часто конструкция, на которой установлена вибродиагностическая система, содержит элементы или подсистемы, недоступные для установки вибродатчиков. Вместе с тем уровень вибрации этих подсистем может быть значительным, а в некоторых случаях и решающим при оценке вибронегруженности системы в целом. Это обстоятельство вызывает необходимость разработки алгоритма восстановления вибрационного поля конструкций по показаниям вибродатчиков.

Уравнения движения линейной диссипативной системы с  $N$  степенями свободы в матричной форме имеют вид [1,2]

$$M\ddot{u}(t) + B\dot{u}(t) + Ku(t) = R(t) \quad (1)$$

где  $M$ ,  $B$ ,  $K$  - соответственно матрица инерции, диссипации, жесткости;  $R(t)$  - вектор-столбец обобщенных внешних сил.

Представим вектор перемещений  $u(t)$  в виде разложения по собственным формам:

$$u(t) = Vf(t) \quad (2)$$

где  $V$  - матрица собственных форм размерностью  $(N \times n)$ , удовлетворяющая следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} V^T MV &= E \\ V^T KV &= W^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $E$  - единичная матрица размерностью  $(n \times n)$ ,  $W^2$  - диагональная матрица квадратов собственных частот размерностью  $(n \times n)$ ,  $n$  - число учитываемых форм колебаний. Использование преобразования (2) с учетом (3) приводит к уравнениям относительно главных координат [1]

$$\ddot{f}(t) + 2[e_{jk}] \dot{f}(t) + \text{diag}(w_j^2) f = V^T R(t) \quad (4)$$

В общем случае матрица диссипации  $[e_{jk}]$  не является диагональной и разделения на независимые уравнения не происходит. Будем считать, что матрица коэффициентов демпфирования пропорциональна матрице инерционных коэффициентов и матрице квазиупругих коэффициентов:  $[e_{jk}] = aM + bK$  где  $a$ ,  $b$  - коэффициенты пропорциональности. Тогда  $[e_{jk}] = \text{diag}\{a + bw_j^2\}$  В этом случае уравнения разделяются и приводятся к виду:

$$\ddot{f}(t) + 2\text{diag}(e_{jk}) \dot{f}(t) + \text{diag}(w_j^2) f = V^T R(t) \quad (5)$$

где  $e_{jk} = a + bw_j^2$ ,  $j=1,2, \dots, n$ .

Пусть в исследуемой системе устанавливается стационарный режим вибраций. Тогда имеет место спектральное разложение [4] для вектора внешних нагрузок и вектора главных координат

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_R(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (6)$$

со спектрами  $S_R(\omega)$ ,  $S_F(\omega)$ , удовлетворяющими условию

$$\text{diag}[\omega_j^2 - \omega^2 + 2ie_j\omega] S_F(\omega) = V^T(t) S_R(\omega) \quad (7)$$

Если обозначить через  $\Phi(i\omega)$  диагональную матрицу размерностью  $(n \times n)$

$$\Phi(i\omega) = \text{diag}[\omega_j^2 - \omega^2 + 2ie_j\omega] \quad (8)$$

то связь между спектрами главных координат и спектрами нагрузки примет вид:

$$S_F(\omega) = \Phi^{-1}(i\omega) V^T S_R(\omega) \quad (9)$$

Таким образом, при заданном векторе внешней нагрузки выражение (9) определяет спектр главных координат. С учетом разложения (2) спектр вектора перемещений вычисляется через спектр главных координат следующим образом:

$$S_u(\omega) = V S_F(\omega) \quad (10)$$

Пусть на конструкции установлено  $m$  однокомпонентных датчиков, измеряющих вибрации в  $m$  точках. Сформируем вектор  $w^T = [w_1(t) \ w_2(t) \ \dots \ w_m(t)]$ , реализации компонент которого получены в результате виброизмерений. Следовательно, известны их спектры Фурье  $S_{kw}(\omega)$ , полученные в результате предварительной обработки вибросигналов. Отметим, что если точки крепления вибродатчиков на элементах конструкции совпадают с узловыми точками ее конечноэлементной модели, то компоненты вектора  $w(t)$  образуют подмножество компонент вектора  $u(t)$ . В противном случае показания датчиков необходимо привести к узловым точкам, используя матрицу интерполирующих функций  $H(x)$  [3]. В дальнейшем будем считать, что точки крепления вибродатчиков совпадают с узловыми точками расчетной модели.

Введем диагональную матрицу  $L$  размерностью  $(N \times N)$ , у которой диагональный элемент равен единице при наличии датчика в соответствующем узле и нулю, если таковой отсутствует. Тогда компонентами вектора  $w(t)$  являются ненулевые компоненты вектора  $Lu(t)$ . Ненулевые компоненты вектора  $(E-L)u(t)$  характеризуют восстановленные по результатам измерений компоненты вибрационного поля. Отметим, что в качестве диагностических признаков могут выступать как компоненты вектора  $Lu(t)$ , так и компоненты вектора  $(E-L)u(t)$ .

Преобразуем матрицу собственных форм, умножив ее на матрицу  $L$ , а затем вычеркнув из нее нулевые строки. В результате получим матрицу  $V_{mn}$  размерностью  $(m \times n)$  для нахождения вектора перемещений

$$w(t) = Lu(t) = V_{mn} f(t) \quad (11)$$

Аналогичное соотношение имеет место в частотной области

$$S_w(\omega) = V_{mn} S_f(\omega) \quad (12)$$

С учетом (9) получаем алгебраическое уравнение, связывающее результаты виброизмерений  $S_w(\omega)$  с вектором спектров обобщенных внешних сил  $S_R(\omega)$

$$S_w(\omega) = V_{mn} \Phi^{-1}(i\omega) V^T S_R(\omega). \quad (13)$$

Вектор внешних нагрузок в реальных условиях неизвестен. Однако при рассмотрении каждой конкретной конструкции почти всегда имеется дополнительная априорная информация о свойствах поля обобщенных внешних сил. Например, могут быть известны источники вибрации (кинематические и динамические воздействия), число существенных компонент нагрузки, точки (узлы) ее приложения и т.д. Данная априорная информация позволяет при планировании виброизмерений сократить число датчиков, а также количество средств и времени для восстановления вектора обобщенных внешних сил.

Будем считать, что вектор нагрузок  $R(t)$  задается с точностью до  $r$  неизвестных параметров  $g_k(t)$ ,  $k=1,2, \dots, r$ , образующих вектор  $G(t)$ , связь между этими векторами

линейная:  $R(t)=DG(t)$ , где  $D$  - матрица коэффициентов размерностью  $(N \times r)$ . Для соответствующих спектров имеем аналогичное соотношение

$$S_R(\omega) = DS_g(\omega) \quad (14)$$

Тогда уравнение (13) может быть записано в виде

$$S_w(\omega) = V_{mn} F^{-1}(i\omega) V^T DS_g(\omega) \quad (15)$$

Таким образом, уравнение (15) дает возможность определить неизвестные спектры  $S_g(\omega)$ :

$$S_g(\omega) = \{V_{mn} \Phi^{-1}(i\omega) V^T D\}^{-1} S_w(\omega) \quad (16)$$

а затем с помощью соотношений (14), (9) и (10) - спектры  $S_R(\omega)$ ,  $S_F(\omega)$ ,  $S_u(\omega)$ .

В качестве примера рассмотрим реакторную установку типа ВВЭР (рис.1,а). Пусть на корпусе реактора установлен вибродатчик, непрерывно измеряющий уровень вибрации. Задача заключается в том, чтобы по показаниям этого вибродатчика восстановить вибрационные характеристики в недоступной для измерений шахте реактора. Механико-математическая модель системы "корпус реактора - верхний блок - шахта реактора" приведена на рис.1,б, где  $m_1$  - масса корпуса реактора и его верхнего блока;  $m_2$  - масса шахты реактора, включая внутрикорпусные устройства;  $c_1, c_2, b_1, b_2$  - характеристики упругости и демпфирования.

Обозначим через  $a(t)$  кинематическое воздействие на систему, а через  $u_1(t), u_2(t)$  - относительные перемещения корпуса и шахты реактора. Тогда уравнения движения можно записать в следующем виде:

$$m_1(\ddot{u}_1 + a) + b_1 \dot{u}_1 + b_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + c_1 u_1 + c_2(u_1 - u_2) = 0 \quad (17)$$

$$m_2(\ddot{u}_2 + a) + b_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + c_2(u_2 - u_1) = 0$$

Введем парциальные частоты и коэффициенты демпфирования

$$\omega_1^2 = (c_1 + c_2) / m_1, \quad \omega_{II}^2 = c_2 / m_2, \quad 2e_1 = (b_1 + b_2) / m_1, \quad 2e_2 = b_2 / m_2$$

и перепишем уравнения (17) в матричной форме (1), где обозначено

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = 2 \begin{bmatrix} e_1 & -m e_2 \\ -e_2 & e_2 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & -m \omega_{II}^2 \\ -\omega_{II}^2 & \omega_{II}^2 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$m = m_2 / m_1,$$

$$R(t) = Da(t), \quad D = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

По формуле (16) получим связь между спектром кинематического воздействия  $A(\omega)$  и спектром  $U_1(\omega)$  показаний датчика

$$A(\omega) = -2U_1(\omega) c \left[ \frac{(c - r + 1)(c + r)}{\omega_1^2 - \omega^2 + 2ie_1\omega} + \frac{(c + r - 1)(-c + r)}{\omega_{II}^2 - \omega^2 + 2ie_2\omega} \right] \quad (19)$$

где обозначено  $g = \tilde{n}_1 / \tilde{n}_2$ ,  $r = [1 + m(1+g)]/2$ ,  $c = [[1 - m(1+g)]^2 + 4m]^{1/2} / 2$ .

Для спектра перемещений  $U_2(\omega)$  шахты реактора, которая недоступна для установки вибродатчиков, но знание ее вибрационных характеристик весьма важно для оценки технического состояния объекта, получим выражение

$$U_2(\omega) = U_1(\omega) \frac{\left[ \frac{(c-r+1)}{\omega_1^2 - \omega^2 + 2ie_1\omega} + \frac{(c+r-1)}{\omega_2^2 - \omega^2 + 2ie_2\omega} \right]}{\left[ \frac{(c-r+1)(c+r)}{\omega_1^2 - \omega^2 + 2ie_1\omega} + \frac{(c+r-1)(-c+r)}{\omega_2^2 - \omega^2 + 2ie_2\omega} \right]} \quad (20)$$

Таким образом, для восстановления спектров  $A(\omega)$  и  $U_2(\omega)$  при известном спектре  $U_1(\omega)$  необходимо знать передаточные функции  $g(\omega), h(\omega)$ , входящие в выражения (19), (20)

$$\begin{aligned} A(\omega) &= -\omega_{II}^2 U_1(\omega) g(\omega), \\ U_2(\omega) &= U_1(\omega) h(\omega). \end{aligned} \quad (21)$$

На рис.2,3 представлены значения квадратов модулей  $|g(\omega)|^2$  и  $|h(\omega)|^2$  соответственно. Для этих функций характерны резкие изменения в окрестности высшей собственной частоты, что требует особого внимания при выборе шага дискретизации по частотному диапазону в уравнениях (21).

Таким образом, рассмотренный алгоритм восстановления вибрационного поля по показаниям вибродатчиков позволяет получить дополнительную информацию об уровне вибрации элементов или подсистем, недоступных для установки датчиков, и повысить эффективность работы вибродиагностических систем.

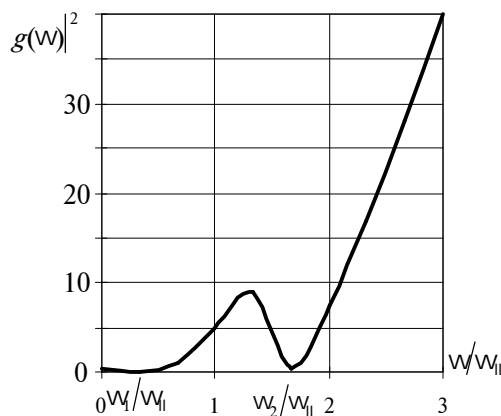


Рис 2.

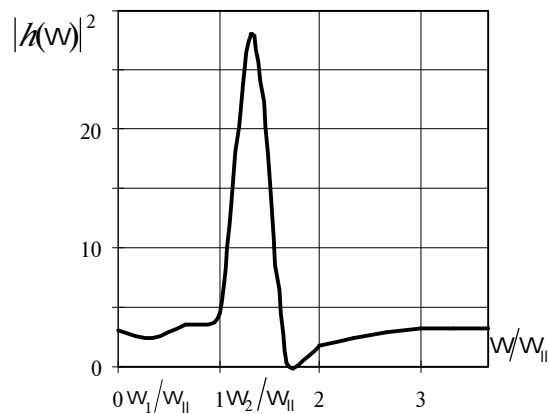


Рис 3.

**Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ в рамках программы «Динамика, прочность и надежность машин, приборов и конструкций».**

## Литература

1. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах, Т.1. Колебания линейных систем/Под ред. В.В.Болотина.-М.: Машиностроение, 1978.-352 с.
2. Бирбраер А.Н., Шульман С.Г. Прочность и надежность конструкций АЭС при особых динамических воздействиях.-М.: Энергоатомиздат, 1989.-304 с.
3. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов.-М.: Стройиздат, 1982.-448 с.
4. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений.-М.: 1982. Стройиздат, 1982.-351 с.