

# Оценка распределений ресурса по индивидуальным кривым усталости

В.А.Копнов

*а/я 64, Екатеринбург, 620107, Россия*

Рассматривается применение индивидуальных кривых усталости, предопределяющих усталостное поведение образцов, когда каждая выборочная индивидуальная кривая усталости соответствует врожденным усталостным свойствам некоторого образца. Исследуется задача накопления усталостных повреждений металлоконструкции козлового крана при стационарном нагружении. Получены функции и значения характеристического ресурса, а также плотности распределения ресурса для предлагаемых моделей кривых усталости.

## Введение

Нахождение распределений усталостного ресурса элементов механических систем при том или ином режиме нагружения является одной из важнейших задач надежности. Модели накопления усталостных повреждений должны быть достаточно “богатыми” в вероятностном смысле, чтобы была возможность подстановки их в развитые системы управления процессами деградации [1,2], использующие современные средства технического мониторинга [3]. Прежде всего должно быть указано то вероятностное пространство, на котором развиваются все случайные события. Во-вторых, должны быть указаны какие физические или мысленные эксперименты лежат в основе построения вероятностного пространства и как события, наблюдаемые в результате проведения экспериментов, соотносятся с элементами этого пространства. Далее, если указано вероятностное пространство, то все случайные величины, появляющиеся по нашему желанию для удобства или необходимости описания усталостных свойств, должны быть в функциональной или стохастической зависимости, и т.д.

Одним из возможных способов введения вероятностных структур в расчеты на усталостную долговечность является использование индивидуальных кривых усталости (ИКУ) [4-6] в виде квантилей соответствующих значений вероятностей. Вместе с тем такой подход не может считаться полностью удовлетворительным, поскольку вероятностные методы расчета на самом деле подменяются расчетами с детерминированными величинами - квантилями. В работе [7] было предложено достаточно простое построение случайных объектов - ИКУ на основе рандомизации предела выносливости. Сформулируем еще раз сущность ИКУ. При оценке любых усталостных параметров используются случайные объекты - индивидуальные кривые усталости, а их выборочные кривые являются описанием усталостных свойств образцов. Вместе с тем с какой именно выборочной кривой непосредственно в процессе испытаний или эксплуатации мы имеем дело нам не известно. Сами же ИКУ являются носителем случайности генеральной совокупности рассматриваемых образцов.

В работе [7] рассматривался прямой подход к построению ИКУ: зная вид ИКУ и задавая распределения ее параметров, необходимо найти распределения ресурса и определить действительное поведение образцов на основе этих распределений. Как и в общей механике, существует другой, обратный, подход к моделированию усталостного феномена [8]. Если даны распределения ресурса, полученные на основе испытаний, необходимо найти случайные объекты ответственные за усталостное поведение образцов.

Обращаясь снова к механической аналогии, можно предложить две категории моделей: статическую и динамическую. Если статистические свойства образцов зафиксированы и процесс накопления повреждений развивается на их основе и

оценивается посредством этих свойств, то такая задача усталости называется статической. С другой стороны, если во главу угла ставится стохастический процесс накопления повреждений и усталостные свойства интерпретируются посредством этого процесса, то такая задача называется динамической. Разница между этими задачами, вообще говоря, появляется из-за двух типов направлений исследований: проектирования и мониторинга. Данное исследование можно классифицировать как статическое.

### Формулы для вычисления характеристического ресурса

Приведем сейчас метод прогнозирования ресурса элементов механических систем в случае стационарного эргодического процесса нагружения с плотностью распределения  $f(S)$  амплитуд циклов нагружения, получаемых с помощью какого-либо метода схематизации.

Пусть ИКУ определяются зависимостью [7]:

$$N(S) = N_0(S_R / S)^m, \quad S > 0, \quad (1)$$

а распределение параметра  $S_R$  имеет логнормальное распределение с плотностью

$$f_1(x) = \frac{\log e}{(2\pi)^{1/2} s_R} \exp\left(-\frac{(\log x - m_R)^2}{2s_R^2}\right),$$

где параметры  $m_R$  и  $s_R$  выражаются через математическое ожидание  $ES_R$  и стандартное отклонение  $SS_R$ . Предположим, что накопление повреждений происходит по линейной гипотезе Майнера и единичное повреждение определяется как

$$m = \int_{S_{\text{lim}}}^{\infty} \frac{f(S)dS}{N(S)}, \quad (2)$$

где  $N(S)$  есть некоторая ИКУ для каждого выборочного значения предела  $S_R$ , определяемая усталостными свойствами образца элемента, а  $S_{\text{lim}}$  - нижний предел интегрирования, различный для каждой из трех предлагаемых моделей ИКУ [7]. Для каждого значения  $S_R$  функция  $N(S)$  есть детерминированная функция, и поэтому интеграл может быть рассчитан как обычный, а форма линейной гипотезы накопления повреждений внешне несколько не изменяется. В первом варианте интегрирование производится от значения  $S_{\text{lim}} = 0$  (модель 1); во втором варианте от детерминированного значения предела выносливости  $S_{\text{lim}} = S_R^*$  (модель 2); в третьем варианте - от случайного предела выносливости  $S_{\text{lim}} = S_R$  (модель 3).

Ресурс при таком нагружении определяется как обратная величина к единичному повреждению, среднему по амплитудам нагружению. Поэтому можно воспользоваться формулами из [9] для характеристического ресурса, определенного для данной кривой усталости (1), в предположении о детерминированном характере предела выносливости и собственно кривых усталости. Пусть распределение амплитуд процесса нагружения, как и в [9], может быть описано весьма гибким трехпараметрическим гамма-распределением с плотностью

$$f(S) = \frac{ab^{g/a}}{\Gamma(g/a)} S^{g-1} \exp(-bS)^a. \quad (3)$$

При подходящем подборе параметров  $a$ ,  $b$ ,  $g$  можно получать различные распределения, такие, как экспоненциальное, полунормальное, Вейбулла, Рэлея и др. При использовании (3) характеристическое значение долговечности, выраженное в числе циклов до отказа  $N$ , принимает вид

$$N = \frac{N_0 S_R^m G(g/a) b^{m/a}}{G((g+m)a^{-1}, b S_{\text{lim}}^a)}, \quad (4)$$

где обозначения  $G(*)$  и  $G(*,*)$  использованы для полной и неполной гамма-функций. Выражение (4) в нашем случае определяет зависимость между случайными величинами: пределом  $S_R$  и ресурсом  $N$  при стохастическом нагружении рассматриваемого вида и, строго говоря, должно выполняться почти всюду в области определения  $S_R$ . Как и в формуле (2), в соответствии с тремя вариантами возможной рандомизации  $S_R$  параметр  $S_{\text{lim}}$ , стоящий в знаменателе (4), также принимает описанные выше три значения.

К сожалению, при рандомизации  $S_R$  в силу весьма сложного характера уравнения (4) не удастся получить аналитических зависимостей для распределений долговечности. Поэтому, чтобы преодолеть это затруднение, предлагается вычислительная процедура определения плотностей распределения для предлагаемых моделей ИКУ.

### Исследование функций характеристического ресурса

Рассмотрим более подробно поведение функций характеристического ресурса при различных параметрах с целью изучения различия плотностей распределения ресурса каждой из предложенных трех моделей.

В качестве примера расчета усталостной долговечности по этой методике рассмотрим процесс нагружения элемента металлоконструкции в опорах козлового крана, полученный при натурном тензометрировании [10], гистограмма амплитуд которого обработана по методу дождя и аппроксимирована распределением Вейбулла с параметрами масштаба  $c = 67.6$  и формы  $b = 2.2$ . Усталостные характеристики элемента конструкции возьмем из справочной литературы [11]. Рассматривается сварной элемент с лобовыми и продольными швами с необработанной прокатной поверхностью и обрезанными газовой машинной резкой кромками, имеющий эффективный коэффициент концентрации напряжений  $K = 3.5$ . Элемент конструкции выполнен из малоуглеродистой стали со средними значениями предела прочности  $E S_B = 380$  МПа и предела выносливости (с учетом  $K$ )  $E S_{-1} = 65$  МПа. Стандартное отклонение предела выносливости рекомендуется брать равным  $S S_{-1} = 15$  МПа. Нормативная кривая усталости имеет значения параметров  $N_0 = 2 \cdot 10^6$  и  $m = 7.5$ . Коэффициент чувствительности к асимметрии циклов напряжений принят равным  $y = 0.2$ : при нахождении распределения амплитуд числа циклов использовалось именно это значение  $y$  в процессе переводе асимметричных циклов нагружения в симметричные.

Характеристическое значение долговечностей (4) в данном случае примет вид

$$N = \frac{N_0 (S_{-1} / c)^m}{G(1 + m/b, (S_{\text{lim}} / c)^b)}. \quad (5)$$

На рис.1 изображена гамма-функция, покрывающая интервал изменения  $S_{-1}$  в диапазоне вероятностей 0.99.

На рис.2 изображены значения характеристического ресурса (5) сплошной линией при изменяющемся  $S_{\text{lim}}$  (модель 3) и пунктирной линией при  $S_{\text{lim}} = E S_{-1}/2$  (модель 2). Видно, что при достаточно больших значениях нижнего порога параметра  $S_R^*$  расчет будет производиться в запас, т.е. знаменатель в (5) не будет увеличивать значения ресурса  $N$  при постоянном значении нижнего предела интегрирования. Модель 1 с нулевым значением предела выносливости не рассматривается вследствие ее малой пригодности.

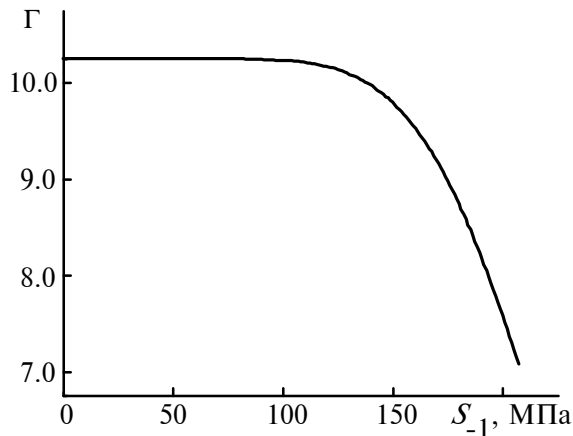


Рис.1. Значения гамма функции при  $m = 7.5$ .

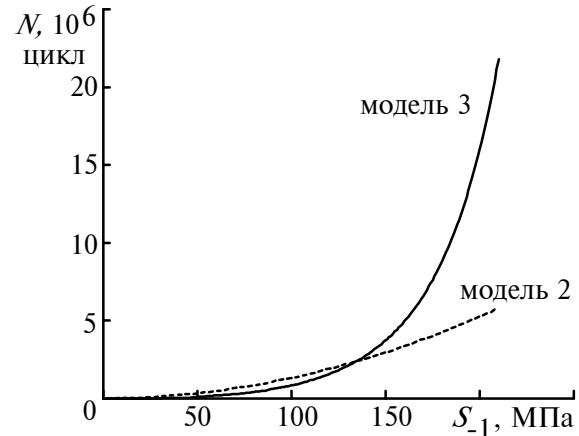


Рис.2. Значения характеристического ресурса при  $m = 7.5$ .

### Вычислительный метод нахождения функции распределения

Рассмотрим вычислительный метод нахождения функции распределения ресурса  $N$  по известному распределению Вейбулла предела выносливости и полученной функции характеристического ресурса (5). Сперва задается диапазон изменения  $S_{-1} \in (0, x^*)$ , где  $x^*$  находится из уравнения

$$\int_0^{x^*} f(x) dx = g,$$

а  $g$  может быть взято из соображений покрытия интервала изменения  $S_{-1}$  с приемлемой вероятностью, например,  $g = 0.999$ . Затем производится дискретизация интервала  $(0, x^*)$  на  $k+1$  точек так, что получатся равноотстоящие значения  $0 = x_0, x_1, \dots, x_k = x^*$ , где  $x_{i+1} - x_i = x^*/k$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . Используя функцию (5) и обозначив текущие значения случайной величины  $N$  через  $y$ , можно для каждого значения  $x_i$  при заданных остальных значениях параметров  $m, b, c, \dots$  найти соответствующие значения  $y(x_i)$  и получить аналогичный ряд значений ресурса  $y_0, y_1, \dots, y_k$ .

По полученным значениям  $x_i$  вычисляется вероятность того, что предел выносливости  $S_{-1}$  не превосходит этих значений:

$$p_i = R\{S_{-1} < x_i\} = \int_0^{x_i} f(x) dx, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Исходя из эквивалентности событий  $\{S_{-1} < x_i\}$  и  $\{N < y_i\}$  в силу монотонности функции (5) получаем, что ряд значений вероятностей  $p_i$  может быть сопоставлен с распределением  $G(y)$  ресурса  $N$  как

$$G(y_i) = R\{N < y_i\} = R\{S_{-1} < x_i\} = p_i, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Дискретный аналог соответствующей плотности распределения  $g(y)$  ресурса может быть найден в виде

$$g(y_i) = (p_i - p_{i-1}) / (y_i - y_{i-1}), \quad i = 1, \dots, k.$$

На рис.3 изображены характеристические функции  $N$  для модели 3 (сплошная линия) и модели 2 (пунктирная линия).

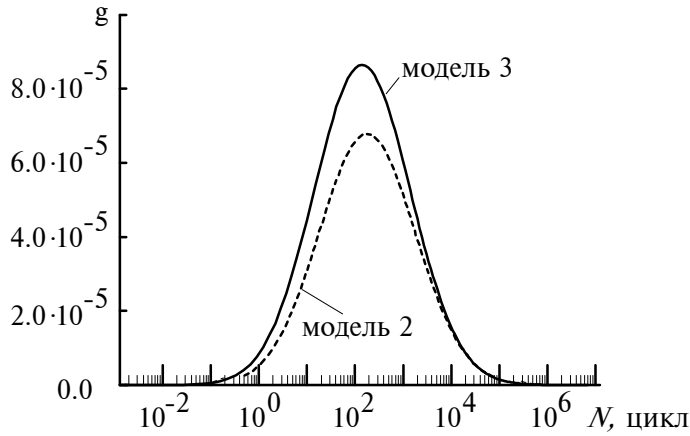


Рис.3. Плотность распределение ресурса.

Отметим, что для модели 3 необходимо выполняется ограничение справа диапазона возможного изменения случайной величины  $N$  значением  $N_0$ . Если же плотность распределения сместится вниз по оси  $S$  (т.е. амплитуды нагружения будут меньше, чем в рассматриваемом случае), то плотность распределения  $N$  сместится вправо и ограниченность распределения ресурса будет проявляться более явно и ее отличие от логнормального распределения станет более разительным.

### Прогнозирование остаточного ресурса

Поиск функций распределения остаточного ресурса также основывается на фундаментальном предположении о наличии у каждого образца своей ИКУ и, кроме того, на апостериорной информации о том, что к моменту прогнозирования при данной истории нагружения  $h$  исследуемого образца его разрушения не произошло. Тогда, если известна предшествовавшая история нагружения, то можно выделить во всем пространстве ИКУ множество кривых, не реализовавшихся при данной истории нагружения, а, значит, и вычислить апостериорные распределения значений ресурса.

В случае регулярного и стационарного стохастического нагружения функция распределения остаточного ресурса получается очень просто из аналитических плотностей распределения ресурса вычислительным методом: для этого надо вычесть из случайной величины  $N$ , определяемой одним из этих распределений, константу - число реализовавшихся регулярных либо приведенных циклов нагружения  $n$  - и учесть то, что к моменту прогнозирования отказа не произошло.

Рассмотрим более подробно случай двухступенчатого нагружения: сначала образец нагружается в течение  $n_1$  циклов с амплитудой  $S_1$ , а затем доводится до разрушения при нагружении с амплитудой  $S_2$ . При детерминированном варианте прогнозирования остаточный ресурс  $N_{res}$  определяется посредством соотношения

$$N_{res} = N_2(1 - n_1 / N_1) .$$

Вспоминая теперь, что  $N_1 = N(S_1)$  и  $N_2 = N(S_2)$  на самом деле случайные величины определяющие ресурс при соответствующем регулярном нагружении, хотя и определяемые одной и той же случайной величиной  $S_R$ , и то, что это равенство должно выполняться почти наверное (при отказе повреждение должно быть равно 1 для каждой ИКУ за исключением множества меры 0), собственно, и приходим к решению задачи стохастического прогнозирования ресурса при двухступенчатом нагружении. Легко устанавливается равенство по вероятности следующих событий:

$$R\{N(S_1) > n_1\} = R\{S_R > a\}, \text{ где } a = S(n_1 / N_0)^{1/m}, \tag{6}$$

откуда получается соответствующее выражение для случайной величины остаточного ресурса:

$$N_{res} = N(S_2) - b, \text{ где } b = n_1(S_1 / S_2)^m . \tag{7}$$

Используя равенства (6-7), получаем распределение ресурса, выраженное через распределение случайной величины  $N(S_2)$ :

$$R\{N_{res} < y\} = R\{N(S_2) < b + y | N(S_2) > b\} = R\{b < N(S_2) < b + y\} / R\{N(S_2) > b\}$$

Отметим, что для многоступенчатого нагружения константа  $b$  принимает вид

$$b = \sum_{i=1}^{j-1} n_i (S_i / S_j)^m .$$

В случае нестационарного нагружения с более сложной историей нагружения потребуется, конечно, более трудоемкая процедура вычисления распределений остаточного ресурса с привлечением распределений величины накопленного повреждения. Пока же нам удалось получить требуемые характеристики, не используя в явном виде зависимости для определения повреждения и его распределений.

## Заключение

Рассмотренный выше пример оценки ресурса дает представление о том, как следует проводить расчеты по прогнозированию ресурса при использовании стохастической модели накопления усталостных повреждений на основе индивидуальных кривых усталости. Изучавшаяся стохастическая надстройка над детерминированным правилом Майнера обладает основной положительной чертой - модель накопления повреждений, исходные данные по усталости и способ прогнозирования ресурса являются взаимосвязанными элементами замкнутой модели надежности элемента по критерию усталостной долговечности. Простота стохастических конструкций моделей и невысокая требовательность к исходным данным также являются весьма привлекательными, что дает возможность их использования в большинстве ситуаций прогнозирования ресурса компонентов. Естественная взаимосвязь задач прогнозирования ресурса и остаточного ресурса легко прослеживается и не требует дополнительных усилий со стороны исследователей.

## Литература

1. Копнов В.А. Оптимальное управление процессами деградации механических систем // Сб.: Проблемы проектирования конструкций. Миасс, 1988.- С.134-139.
2. Koptov V.A. Residual life, linear fatigue damage accumulation and optimal stopping // Reliability Engineering and System Safety. -1993.-40.-№3.-pp. 319-325.
3. Копнов В.А., Тимашев С.А. Датчики усталостного повреждения. Екатеринбург: Наука, 1992.- 86с.
4. Райхер В.Л. О некоторых следствиях из двухпараметрической модели рассеяния долговечности // Ученые записки ЦАГИ. -1982. -т.13. -N2.
5. Селихов А.Ф. Общая модель рассеяния сопротивления усталости при регулярном нагружении // Ученые записки ЦАГИ. -1984. -т.15.-N2. -С. 57-71.
6. Селихов А.Ф. Модель рассеяния долговечности элемента конструкции при нерегулярном нагружении // Ученые записки ЦАГИ. -1984. -т.15. -N3. -С. 107-120.
7. Koptov V.A. A Randomized Endurance Limit in Fatigue Damage Accumulation Models // Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures. -1993.- 16.-№10.- pp.1041-1059.
8. Koptov V.A. Intrinsic Fatigue Curves Applied to Damage Evaluation of Laminate and Fabric Materials // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 1997.-26.-pp.169-176.
9. Гусев А.С. Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках. -М.: Машиностроение, 1989. -248 с.
10. Васильев В.Г. Обоснование скоростных параметров козловых кранов для работы с хлыстами. Дисс... канд. техн.наук по специальности 05.21.01. Химки,1990.-252 с.
11. МУ РД 50-694-90. Надежность в технике. Вероятностный метод расчета на усталость сварных конструкций. -М.: Изд-во "Госстандарт", 1991. -84 с.