

Устойчивость процессов прогрессирующего формоизменения при малоцикловом нагружении

О.Ф.Чернявский

Челябинский государственный технический университет

Одним из предельных состояний высокотемпературных конструкций, в частности элементов ядерных реакторов, является прогрессирующее коробление, обусловленное термическими напряжениями. Это явление практически не отражено в существующих нормах прочности реакторов, но не из-за малозначимости, а из-за существенных трудностей, связанных с анализом потери устойчивости за пределами упругости при повторных неизотермических нагружениях.

Практика эксплуатации термонапряженных конструкций и лабораторные испытания моделей в условиях теплосмен дают многочисленные примеры прогрессирующего коробления. Напомним некоторые из них. На рис.1 показаны (следуя [1]) общий вид и поперечное сечение кессона шахтной плавильной печи после непродолжительной эксплуатации при теплосменах в условиях, когда механические нагрузки незначительны. Первоначальная форма кессона - коробка 4.0х6.0х0.25 м. из плоских прямоугольных элементов. На рис.2 изображены первоначально прямые колосники обжиговых машин Соколовско-Сарбайского ГОК [2], работающие в условиях интенсивных теплосмен. Через пазы, расположенные у краев колосников, проходят опорные балки, механические нагрузки - вес окатышей - незначительны и направлены навстречу прогибам для наиболее сильно изогнутых колосников. Рис.3 иллюстрирует прогрессирующее выпучивание кромки рабочего колеса радиальной газовой турбины при теплосменах [1]. На рис.4 показан край головного обтекания ракеты, ставший гофрированным после повторных аэродинамических нагревов. Прогрессирующее коробление первоначально плоской круглой пластинки с жестким центром при повторных индукционных нагревах с подводом тепла по наружному контуру иллюстрирует, следуя [3], рис.5. Совершенно аналогичное явление наблюдается в кольцевых тонкостенных элементах дисковых тормозов тракторов. На рис.6 и 7 показаны [1,3] кольцевые гофры, образовавшиеся вследствие многократных проходов сравнительно небольшого "горячего пятна" в цилиндрической оболочке (рис.6, лабораторные испытания) и в корпусе вращающейся обжиговой печи в условиях эксплуатации (рис.7). Наконец, на рис.8 [3] показаны первоначально прямые цилиндрические оболочки после многократных проходов "тепловой волны", перемещающейся в направлении оси оболочки.

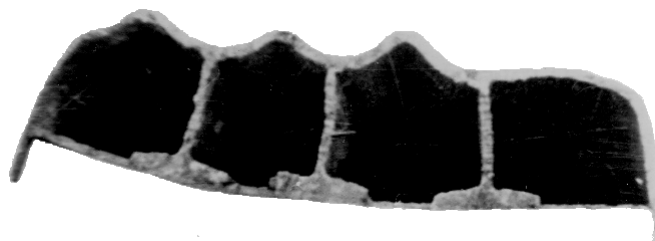


Рис. 1



Рис. 2

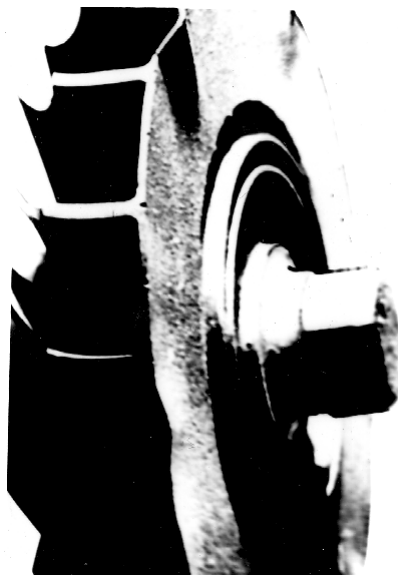


Рис. 3

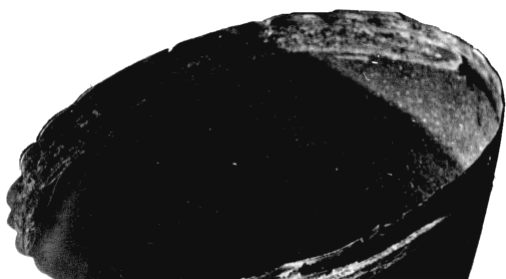


Рис. 4



Рис. 5

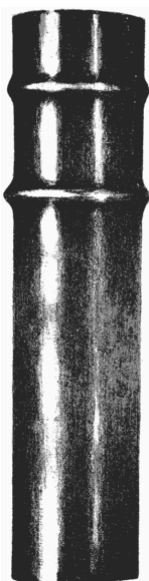


Рис. 6

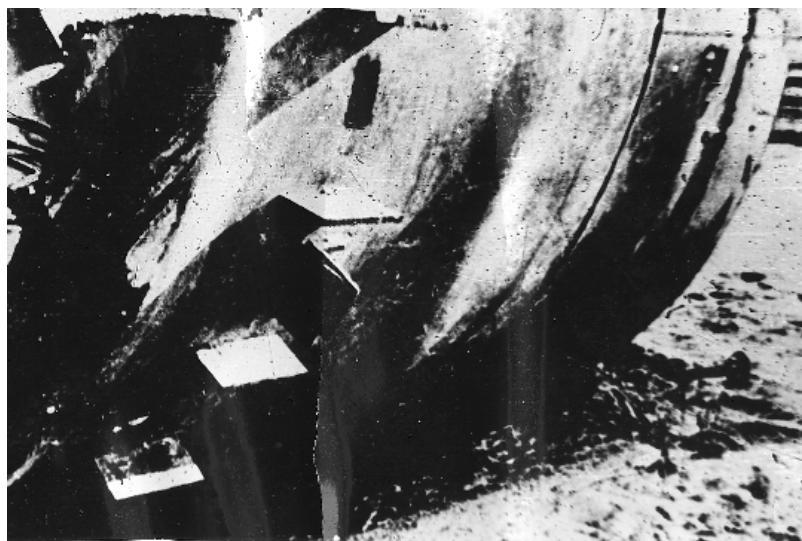


Рис. 7



Рис. 8.

Можно было бы привести множество других примеров, поскольку прогрессирующее коробление при теплосменах распространено достаточно широко - от бытовых нагревательных устройств (конфорки электроплит) до элементов ракет и атомных реакторов. Характерными чертами, объединяющими эти примеры, являются увеличение остаточных перемещений с ростом числа циклов нагружения (именно числа циклов, а не длительности нагружения) и наличие бифуркации процесса деформирования, приводящей, в частности, к образованию пространственных остаточных складок в плоских конструкциях при равномерном по толщине нагрева (рис.3,5), развитию неосесимметричных остаточных деформаций в цилиндрических оболочках при осесимметричном нагреве (рис.8) и т.д. При этом накопленные после ряда циклов нагружения деформации могут значительно (иногда в сотни и тысячи раз) превышать максимальные значения свободных тепловых деформаций αT_{\max} (α - коэффициент линейного теплового расширения, T_{\max} - максимальная температура цикла).

Первые целенаправленные описания прогрессирующего коробления при теплосменах были опубликованы, по-видимому, еще около 40 лет назад (соответствующий обзор дан, в частности, в [3]), но до сих пор основные закономерности этого явления почти не исследованы, а методы его расчета развиты совершенно недостаточно как применительно к проблемам прочности, так и применительно к технологическим задачам, где это явление могло бы быть использовано. Первая попытка аналитического описания прогрессирующего коробления при теплосменах была сделана, по-видимому, Д.А.Гохфельдом и А.Е.Харитончиком [4] в 1966 году. Авторами был выполнен поцикловой расчет процесса нарастания прогибов в шарнирно опертом стержне при циклических равномерных нагревах-охлаждениях. Предполагалось, что пластические деформации в среднем сечении стержня одновременно охватывают все поперечное сечение и различны в полуциклах нагрева и охлаждения вследствие изменения формы стержня. Расчет предсказывал максимальное приращение прогиба в первом цикле с последующим уменьшением приращений. Этот вывод не всегда согласуется с экспериментальными данными.

Некоторое развитие работы [4] было дано в [3,5], где учитывалась неизохронность пластического течения в среднем сечении стержня, что позволило объяснить более сложный характер накопления прогибов: увеличение приращений прогибов за цикл в течение некоторого числа первых циклов с последующим постепенным уменьшением приращений до нуля.

Впервые в работе [5] была получена полезная для проектирования конструкций верхняя оценка условий прогрессирующего коробления, в соответствии с которой оно может быть реализовано в зонах развитого знакопеременного течения, если какая-либо линейная комбинация скоростей неупругих деформаций образует кинематически возможное поле ненулевых приращений деформаций за цикл. Этот вывод, в частности, указывал, что размеры зон конструкций, в которых размах условных упругих напряжений превышает два предела текучести, должны быть ограничены во избежание существенного коробления.

Другой подход к анализу геометрической нелинейности при малоцикловом нагружении был развит в работах Дж.Майера [6,7 и др.]. Здесь проблема стационарного циклического деформирования рассматривалась в самой общей постановке с учетом практически всех возможных конечных изменений геометрии конструкции. Практическая реализация такого подхода пока, однако, остается в большинстве случаев весьма затруднительной.

Приходится признать, что в настоящее время нет достаточно развитых методов расчета, которые бы позволили описать поведение конструкций типа изображенных на рис.1-8. Создание таких методов оказалось весьма сложной задачей, поскольку они должны описывать потерю устойчивости за пределами упругости при циклических нагружениях заданными смещениями, а не силами, с учетом сложных программ нагружения и соответствующих им деформационных свойств материалов.

1. Основные определения. Постановка задачи

Прогрессирующее коробление - это процесс накопления (увеличения) остаточных деформаций и перемещений с увеличением числа циклов внешних воздействий, отличающийся от прогрессирующего формоизменения тем, что распределение приращений за цикл в объеме тела не соответствует основному направлению процесса формоизменения, отвечающему решению геометрически линейной задачи.

Другими словами, прогрессирующее коробление является таким частным случаем прогрессирующего формоизменения, при котором неустойчив основной процесс упруго-пластического деформирования при циклическом нагружении. Необходимым условием существования прогрессирующего формоизменения (и - соответственно - прогрессирующего коробления) является неизохронность неупругого деформирования в объеме тела. Скорости неупругих деформаций должны быть отличны от нуля в разное время в разных точках тела; в каждый момент времени они несовместны, но образуют за цикл совместные приращения деформаций. Эти деформации и обусловленные ими остаточные перемещения могут быть малыми, но если процесс не прекращается с увеличением числа циклов, то после достаточно большого числа циклов он может приводить к существенным изменениям формы конструкции [1]. Именно неизохронность неупругого деформирования отличает процесс прогрессирующего формоизменения и коробления от "мгновенных" процессов неупругого деформирования и выпучивания.

Предложенное здесь определение прогрессирующего коробления базируется на общих положениях теории устойчивости неупругих систем [8,9], но выделяет определенный ограниченный класс процессов деформирования, связанных с потерей устойчивости при повторных нагружениях.

Задача анализа процесса прогрессирующего коробления в самой общей форме требует исследования кинетики неупругого циклического деформирования с учетом геометрической нелинейности, реальных свойств материала (таких, как нелинейность диаграммы кратковременного деформирования, ползучесть, взаимодействие пластического деформирования и ползучести, многочисленные эффекты циклического неизотермического длительного нагружения и т.д.), сложных программ циклического нагружения, структурно-геометрических особенностей конструкции, и, наконец, поциклового дрейфа границ пластических зон. Выбор той или иной схематизации этого многофакторного процесса определяется прежде всего целью расчета, конкретными геометрическими характеристиками конструкции и условиями нагружения.

В зависимости от роли упругих и пластических деформаций можно выделить две крайние группы расчетных схем. К одной относятся гибкие конструкции, в которых существенные изменения формы и размеров происходят в упругой области, то есть до начала пластического деформирования в каждом цикле нагружения; эти изменения определяют локализацию и характер пластического деформирования, роль которого в формировании геометрии конструкции незначительна в течение некоторого числа циклов.

К другой группе можно отнести жесткие конструкции, в которых изменения геометрических характеристик обусловлены только неупругим деформированием. Между этими крайними случаями находится обширная промежуточная зона, для которой существенны и упругие и пластические изменения размеров и формы.

Такое деление, естественно, условно. Поведение конструкции зависит не только от геометрических параметров и свойств материала, но и от характера нагрузок (как механических, так и дилатационных), программы их изменения и величин нагрузок. В зависимости от интенсивности нагружения существенные остаточные изменения геометрических характеристик могут достигаться в течение одного цикла нагружения, нескольких циклов или только в течение сотен или тысяч циклов. В последнем случае на определенной базе по числу циклов (в пределах одного цикла или десятков циклов) изменения геометрических характеристик могут считаться незначительными.

Наибольший интерес при расчетах на прочность в условиях термоциклического нагружения представляют жесткие (и приближающиеся к ним промежуточные) конструкции при сравнительно медленном накоплении остаточных перемещений по

числу циклов. К аналогичным задачам приводят и некоторые малопроизводительные малоцикловые технологические процессы, используемые в индивидуальном и мелкосерийном производстве (в отличие от высокопроизводительных процессов, в которых значительные деформации достигаются в одном цикле).

Множественность факторов и процессов, определяющих деформационные характеристики материалов при повторном и циклическом неизотермическом сложном длительном непропорциональном нагружении предопределяет значительное разнообразие способов схематизации реальных свойств материалов. Применительно к однократному кратковременному увеличению внешней нагрузки наибольшее применение в задачах анализа неупругого выпучивания получили диаграммы с линейными упрочнением и идеальным эффектом Баушингера [8,9]. Для решения довольно широкого круга прочностных и технологических задач при циклическом дилатационном и механическом нагружении можно ограничиться еще более простой схематизацией свойств материала - моделью идеально упруго-пластического тела. Диаграмма Прандтля является в этих случаях схематизацией реальной диаграммы (тонкая линия), полученной при температурах, длительностях и средах, характерных для реальных условий эксплуатации конструкций [3,5]. Кроме перечисленных факторов, реальная диаграмма должна учитывать ожидаемый характер механизма деформирования (накопление односторонней деформации, знакопеременное течение или их сочетание). Предел текучести идеализированной диаграммы оказывается при этом зависящим от перечисленных факторов. Характеристики упругости (модуль упругости, коэффициент Пуассона) удобно, следуя [3,5], принять не зависящими от температуры и истории нагружения; как правило, это не ведет к заметным погрешностям.

Предлагаемая схематизация свойств является достаточно реалистичной (то есть реальный модуль упрочнения действительно мал по сравнению с модулем упругости) в большинстве технологических задач, где пластические деформации достаточно велики, но не приближаются к ресурсу пластичности. Она реалистична также и при небольших пластических деформациях при высоких температурах. Можно заметить, что при оценке работоспособности довольно широкого класса конструкций предельное (по стабильности геометрии) состояние соответствует достаточно развитым неупругим деформациям, при которых модуль упрочнения также невелик. Это не относится, конечно, к конструкциям, где предъявляются особо жесткие требования к стабильности геометрии: элементам сопряженных подвижных устройств, прецизионных опор и т.п.; а также к конструкциям, материалы которых обнаруживают существенное деформационное упрочнение вплоть до разрушения, что, как правило, имеет место при пониженных температурах.

Ниже рассматриваются только жесткие (в указанном выше смысле) конструкции из идеально упругопластического материала. Кроме того, принимается, что накопленные деформации и перемещения изменяются с увеличением числа циклов достаточно медленно, так что на некоторой ограниченной базе по числу циклов можно приближенно считать поведение конструкции стабильным, то есть не изменяющимся от цикла к циклу. Очевидно, что такое поведение конструкции возможно лишь в том случае, когда внешние воздействия находятся вблизи границы упругой приспособляемости.

Эти ограничения позволяют использовать для анализа процессов прогрессирующего коробления теоремы и методы теории приспособляемости идеально упруго-пластических тел. Основной задачей этой теории является, как известно, определение условий начала прогрессирующего формоизменения, то есть максимальных параметров внешних воздействий, при которых приращения пластических деформаций за цикл De''_{ij} равны нулю во всех точках тела, или, соответственно, минимальных параметров, при которых в каких-либо точках $De''_{ij} \neq 0$.

В рамках сделанных выше предположений о малости деформаций, накопленных в процессе стабилизации, геометрически нелинейные задачи могут быть сведены к последовательности линейных задач так же, как в теории предельного равновесия [10]: вычисляются условия начала формоизменения и соответствующий им механизм неупругого деформирования, затем - в соответствии с найденным механизмом - задаются

приращения остаточных перемещений и вновь вычисляются условия начала формоизменения и т.д. В результате может быть получена зависимость параметра предельной (по прогрессирующему формоизменению) нагрузки P и параметра остаточных перемещений Du типа изображенной на рис.9. Для анализа процесса прогрессирующего коробления необходимо найти на этой кривой точки бифуркации процесса (в дальнейшем ограничимся лишь бифуркациями первого порядка [8]) и исследовать устойчивость возможных продолжений процесса.

Рассматриваемый подход к решению геометрически нелинейных задач теории приспособляемости применим, очевидно, лишь при определенных программах изменения внешних воздействий: параметры внешних воздействий должны оставаться по мере накопления остаточных перемещений достаточно близкими к параметрам предельного цикла.

2. О возможности обнаружения точек бифуркации процесса формоизменения в рамках анализа стабильных циклов деформирования конструкций

Необходимым условием наличия точки бифуркации в описании стабильного цикла деформирования конструкции является отсутствие единственности полей скоростей пластических деформаций при заданных внешних воздействиях.

Как известно, стабильный цикл деформирования конструкции, образующийся вследствие выработки в первых - нестабильных - циклах благоприятного поля остаточных напряжений, описывается системой соотношений, включающей:

- уравнения равновесия:

$$S_{ij,j} + X_i = 0 \text{ в объеме } V, \quad S_{ij}n_j = p_i \text{ на } S_p; \quad (1)$$

- условия совместности деформаций, принимающие для жестких конструкций вид

$$\dot{e}'_{ij} + \dot{e}''_{ij} + \dot{e}^T_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (2)$$

(здесь $\dot{e}'_{ij} = A_{ijk} \dot{s}_{hk}$ - скорости упругих деформаций, \dot{e}''_{ij} , \dot{e}^T_{ij} - скорости пластических и дилатационных деформаций, соответственно, \dot{u}_i - скорости перемещений);

- ограничения на величины напряжений (напомним, что здесь рассматриваются только идеально упругопластические материалы)

$$f(s_{ij}) \leq 0, \quad (3)$$

где $f(s_{ij}) = 0$ - поверхность текучести;

- ассоциированный закон течения

$$\dot{e}''_{ij} = \sum_a l_a \frac{\partial f_a}{\partial s_{ij}}, \quad l_a \geq 0, \quad l_a f_a = 0, \quad l_a \dot{f}_a = 0; \quad (4)$$

и условие замкнутости цикла с периодом T по напряжениям

$$\int_0^T \dot{s}_{ij} dt \equiv 0, \quad \text{или} \quad (s_{ij})_{t=0} \equiv (s_{ij})_{t=T}, \quad (5)$$

принимающее в кинематической форме вид

$$De''_{ij} = \frac{1}{2}(Du_{i,j} + Du_{j,i}), \quad De''_{ij} = \int_0^T \dot{e}''_{ij} dt, \quad Du = \int_0^T \dot{u}_i dt. \quad (6)$$

Предположим, что при заданных (изменяющихся циклически) внешних воздействиях в стабильном цикле деформирования конструкции возможны два

различных распределения напряжений $s_{ij}^{(1)}$ и $s_{ij}^{(2)}$. Поскольку оба эти напряженные состояния допустимы (то есть удовлетворяют условию (3)), а соответствующие им скорости пластических деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}''^{(1)}$ и $\dot{\epsilon}_{ij}''^{(2)}$ удовлетворяют ассоциированному закону течения (4), из постулата Друккера [11] следует, что

$$J = \int_0^T dt \int_V \left(s_{ij}^{(1)} - s_{ij}^{(2)} \right) \left(\dot{\epsilon}_{ij}''^{(1)} - \dot{\epsilon}_{ij}''^{(2)} \right) dV \geq 0, \quad (7)$$

причем равенство нулю здесь возможно лишь в том случае, когда $s_{ij}^{(1)}$ и $s_{ij}^{(2)}$ совпадают с точностью до компонент, не влияющих на пластическое деформирование. При этом, согласно (4), должны совпадать направления скоростей пластических деформаций, но на величины скоростей не накладывается ограничений.

Учитывая, что для замкнутого, то есть удовлетворяющего условию (5), цикла напряжений

$$\int_0^T \left(s_{ij}^{(1)} - s_{ij}^{(2)} \right) \left(\dot{\epsilon}_{ij}'^{(1)} - \dot{\epsilon}_{ij}'^{(2)} \right) dt = \int_0^T A_{ijhk} \left(s_{ij}^{(1)} - s_{ij}^{(2)} \right) \left(\dot{s}_{hk}^{(1)} - \dot{s}_{hk}^{(2)} \right) dt = 0,$$

левую часть неравенства (7) можно записать в виде

$$J = \int_0^T dt \int_V \left(s_{ij}^{(1)} - s_{ij}^{(2)} \right) \left(\dot{\epsilon}_{ij}'^{(1)} + \dot{\epsilon}_{ij}''^{(1)} + \dot{\epsilon}_{ij}^T - \dot{\epsilon}_{ij}'^{(2)} - \dot{\epsilon}_{ij}''^{(2)} - \dot{\epsilon}_{ij}^T \right) dV. \quad (8)$$

Тогда в соответствии с принципом возможных перемещений

$$J = 0, \quad (9)$$

поскольку разность напряжений является самоуравновешенной, а разность скоростей полных деформаций совместна согласно (2).

Сопоставление выражений (8),(9) и (7) показывает, что в стабилизированном цикле деформирования конструкции тензоры напряжений единственны (с точностью до компонент, не влияющих на пластическое деформирование) в тех точках тела и в те моменты времени, где и когда скорости пластических деформаций отличны от нуля. Направления скоростей пластической деформации при этом также единственны, но величины этих скоростей могут быть различными. Последнее создает возможность реализации качественно различных механизмов формоизменения (то есть полей приращений пластических деформаций за цикл) при фиксированных параметрах внешних воздействий.

Эта особенность стабилизированных циклов деформирования проявляется, в частности, в задачах расчета условий прогрессирующего формоизменения тем, что при наличии точного (полного) решения, полученного статическим методом, в принципе невозможно получить через соотношения типа (4) механизм формоизменения (поле приращений деформаций за цикл). Можно отметить, что аппарат решения двойственных неклассических вариационных задач формально преодолевает эту трудность, но достигается это всегда за счет ограничения класса возможных механизмов формоизменения основным направлением процесса, то есть геометрически линейной задачей. Покажем теперь на простых примерах возможность обнаружения точек бифуркации процесса формоизменения в предельном (по условиям приспособляемости) цикле.

3. Примеры расчета точек бифуркации процесса прогрессирующего формоизменения

В качестве простейшего методического примера рассмотрим расчет прямого стержня прямоугольного сечения (рис.10), нагруженного постоянной во времени осевой силой P при циклических изменениях изгибающего момента

$$-M_* \leq M(t) \leq M_* \quad (10)$$

На рис.10б показана область допустимых значений не зависящих от времени напряжений в поперечном сечении стержня S_0 , определенная в соответствии с [3,5]:

$$|S_0| = S_s - S_u \frac{|y|}{h}, \quad S_u = \frac{6M_*}{4bh^2} \quad (11)$$

В соответствии со статической теоремой теории приспособляемости в форме, предложенной в [5], получим условие начала прогрессирующего формоизменения стержня:

$$P = \int_{-h}^h S_0 b dy = 2S_s hb - S_u hb, \quad (12)$$

при этом в левой и правой половинах сечения полные напряжения достигают предела текучести при сжатии в разное время (при $M(t) = M_*$ и $M(t) = -M_*$ соответственно). Диаграмма приспособляемости стержня показана на рис.10в: жирной линией изображены условия начала прогрессирующего формоизменения, тонкой - условия знакопеременного течения на поверхностях стержня.

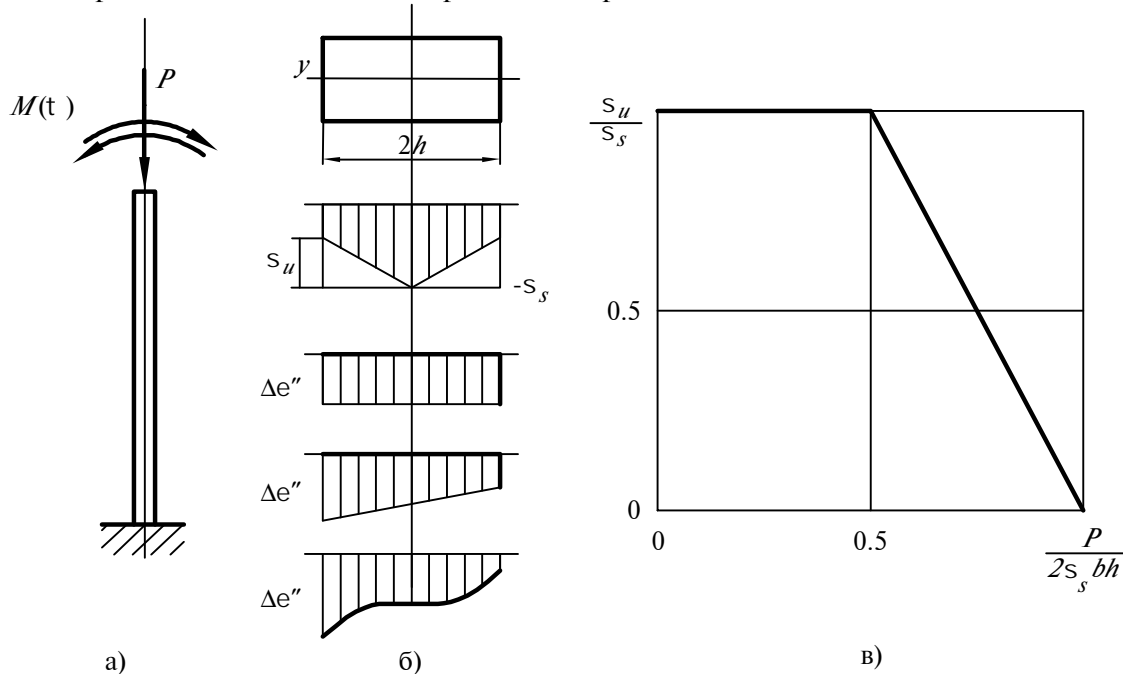


Рис. 10.

Ассоциированный закон течения (3) указывает, что в предельном (по прогрессирующему формоизменению) цикле скорости осевых пластических деформаций в стержне всюду отрицательны

$$De'' < 0,$$

но их распределение по сечению не может быть найдено по известным напряжениям с помощью ассоциированного закона течения. Для поиска возможных направлений процесса прогрессирующего формоизменения (то есть возможных полей приращений пластических деформаций за цикл) воспользуемся приближенным кинематическим методом теории приспособляемости [5], задавая механизм формоизменения в виде

$$De'' = -De_0 - \left(\frac{y}{h}\right)^n De_1, \quad 0 < De_1 < De_0, \quad n = 0,1,2,3,\dots \quad (13)$$

В закрепленном сечении стержня будет иметь место разрыв приращений перемещений, который при строгой (трехмерной) постановке задачи не является допу-

стимым. Если протяженность зоны краевого эффекта невелика по сравнению с длиной стержня, то с учетом ограниченности приращений деформаций влияние этой зоны можно учесть в балансе работ приближенно как влияние разрыва перемещений.

Неизвестное распределение De'' описывается при этом фактически полным набором функций. В соответствии с кинематической теоремой теории приспособляемости в форме, предложенной в [5], условие начала формоизменения принимает вид

$$PDe_0 l \geq lb \int_{-h}^h \left(-s_s + s_u \frac{|y|}{h} \right) \left[-De_0 - \left(\frac{y}{h} \right)^n De_1 \right] dy \quad (14)$$

или

$$\frac{P}{2s_s bh} \geq 1 - \frac{1}{2} \frac{s_u}{s_s} \quad \text{при } n = 0, 1, 3, 5, \dots \quad (15)$$

$$\frac{P}{2s_s hb} \geq 1 - \frac{1}{2} \frac{s_u}{s_s} + \frac{1}{n+1} \frac{De_1}{De_0} - \frac{1}{n+2} \frac{s_u}{s_s} \frac{De_1}{De_0} \quad \text{при } n = 2, 4, 6, \dots \quad (16)$$

Из двух этих групп верхних оценок условий формоизменения лучшей является первая, при которой нагрузка совпадает с (12). Соответствующие механизмы формоизменения - любые кососимметричные распределения приращений осевых деформаций.

Таким образом, предельный (по прогрессирующему формоизменению) цикл является точкой, ветвления в которой при фиксированных параметрах внешних воздействий возможно бесконечное множество направлений процесса прогрессирующего формоизменения. До этой точки процесс деформирования конструкции устойчив [8]: любое исчезающе малое возмущение не нарушает условий приспособляемости, то есть не может приводить к накоплению конечных деформаций (если, естественно, не нарушаются принятые выше допущения о малости деформаций в процессе стабилизации). Обнаружение точки бифуркации в рамках кинематического метода теории приспособляемости становится возможным, как и в любой задаче устойчивости, только при рассмотрении механизмов деформирования, отличающихся от основного продолжения процесса, в данном примере - от равномерной осадки стержня при сохранении прямолинейной оси. Очевидно, что в данном примере класс возможных продолжений процесса допускает дальнейшее расширение, если допустить неравномерность деформирования по длине стержня. Сделанные выше выводы можно отнести не только к предельному (по условиям приспособляемости) циклу, но и к любому стабилизированному циклу прогрессирующего формоизменения за пределами упругой приспособляемости.

Рассмотрим теперь пример расчета длинной цилиндрической оболочки при повторных воздействиях "тепловой волны" (рис.11), перемещающейся вдоль оси оболочки.

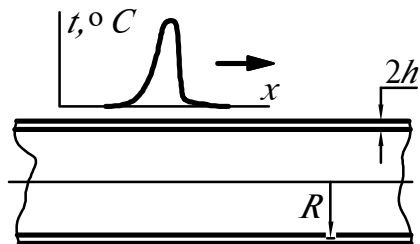


Рис. 11

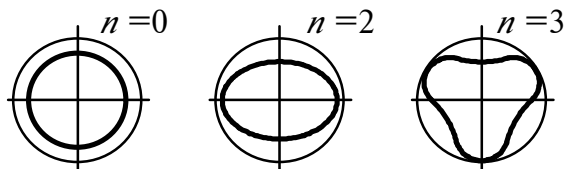


Рис. 12

Чтобы выделить основные особенности расчета, связанные с определением точки бифуркации, ограничимся упрощенной схемой, предложенной в [1], в соответствии с которой "объемлющее" распределение переменных термоупругих окружных напряжений $s_j^{(e)}(t, z)$ является постоянным по толщине ($-h \leq z \leq h$)

$$\min_t s_j(t, z) = -s_j^* = \text{const.} \quad (17)$$

Знак (-) в выражении (17) указывает, что для распределения температур, изображенного на рис.11, максимальные по величине окружные термоупругие напряжения являются сжимающими. Учет изгибных составляющих термоупругих напряжений не вызывает принципиальных затруднений, здесь они не рассматриваются лишь чтобы подчеркнуть особенности, отличающие анализ коробления от анализа линейной задачи о прогрессирующем формоизменении [1,3,5].

Статический метод расчета условий прогрессирующего формоизменения [3,5] показывает, что в предельном цикле

$$S_j^* = S_{\mathcal{J}}, \quad (18)$$

тот же результат дает и приближенный кинематический метод, если принять, что приращения осевых перемещений отсутствуют ($Du = 0$), а приращения диаметра за цикл одинаковы для всех точек срединной поверхности оболочки

$$DW = \text{const}, \quad (19)$$

здесь x - координата, которая отсчитывается вдоль меридиана оболочки, j - угловая координата в поперечном сечении.

Примем теперь более сложное распределение радиальных DW и окружных DV приращений перемещений за цикл, удовлетворяющее, как показано в [12], условиями совместности:

$$DW = -DW_0 - DW_1 \frac{n}{n^2 - 1} \cos nj, \quad DV = DV_0 \frac{1}{n^2 - 1} \sin nj, \quad (20)$$

$$Du = 0, \quad DW_0 > 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

Приращения окружных De_j'' , осевых De_x'' и сдвиговых деформаций оказываются тогда следующими [12]:

$$De_j'' = -\frac{DW_0}{R} - \frac{DW_1 - DV_0}{R} \cdot \frac{n}{n^2 - 1} \cos nj, \quad De_x = 0, \quad Dg_{xj} = 0 \quad (21)$$

(изгибные составляющие De_j'' , пропорциональные расстоянию z от срединной поверхности оболочки, здесь отброшены, поскольку - с одной стороны - отношение h/R считается достаточно малым по сравнению с единицей, с другой стороны - напряжения (17) не совершают работы на изгибных приращениях деформаций).

В случаях, когда De_j'' , определяемые выражением (21), остаются отрицательными, теорема Койтера [3,5] приводит к условию прогрессирующего формоизменения (18). Соответствующие возможные формы поперечного сечения показаны на рис.13 для $n = 0$, что соответствует (19), и для $n = 2, n = 3$. Можно отметить, что в лабораторных испытаниях оболочек разной толщины по схеме, изображенной на рис.12, действительно получались все три изображенные здесь формы сечений (см., например, рис.8).

Существенно, что наличие точек бифуркации в рассмотренных двух примерах соответствует неустойчивости процесса деформирования в том смысле, что при увеличении нагрузок отношение приращения перемещения к приращению нагрузки может стать сколь угодно большим при достаточном числе циклов. Это, однако, не означает, что основной процесс формоизменения (здесь он соответствует прямолинейной форме стержня и круговой форме оболочки) окажется неустойчивым. В частности, в рассмотренных примерах все рассуждения и выводы остаются справедливыми при изменении знака внешних воздействий, то есть при прогрессирующем растяжении стержня и оболочки, когда основное продолжение процесса очевидно устойчиво, если не учитывать изменения поперечных сечений. В связи с этим необходимо определение типа бифуркации, как и в аналогичных задачах устойчивости упругих систем [12].

4. Закритическое формоизменение

Определим условие начала прогрессирующего формоизменения стержня (рис.10а) в зависимости от накопленных остаточных перемещений. В соответствии с принятым выше ограничением здесь рассматриваются только такие программы перехода от одних параметров цикла к другим, при которых перемещения, накопленные в процессе стабилизации, несущественны, а заметные изменения формы стержня появляются лишь после достаточного числа циклов стабильного деформирования.

При любом неравномерном только по сечению распределении приращений деформаций, изображенном на рис.10б, стержень искривляется, как показано на рис.13. Направление нагрузки P примем при этом неизменным. Тогда любое малое остаточное искривление стержня приводит к изменению механизма формоизменения: приращение пластических деформаций за цикл локализуется в заделке, и при дальнейшем прогрессирующем формоизменении ось стержня не искривляется, а зону вблизи опоры можно приближенно рассматривать как разрыв приращения перемещений.

Найдем теперь условия начала прогрессирующего формоизменения для прямого стержня, отклоненного от вертикали на угол j . Воспользуемся приближенным кинематическим методом. Предположим, что разрывы приращений перемещений за цикл Du распределяются по сечению по линейному закону (рис.13в):

$$Du = -Du_0 + yDj, \quad Du_0 \geq 0, \quad Dj \geq 0, \quad hDj > Du_0. \quad (22)$$

Тогда в соответствии с кинематической теоремой [1,3,5], условие начала прогрессирующего формоизменения принимает вид

$$\begin{aligned} & P[1 - \cos(j + Dj) - (1 - \cos j)] + PDu_0 \geq \\ & \geq b \int_{-h}^0 \left(-s_s - \frac{y}{h} s_n \right) (-Du_0 + yDj) dz + \\ & + b \int_0^{y_1} \left(-s_s + \frac{y}{h} s_n \right) (-Du_0 + yDj) dz + \\ & + b \int_{y_1}^h \left(s_s - \frac{y}{h} s_n \right) (-Du_0 + yDj) dz, \end{aligned} \quad (23)$$

или, после упрощений

$$\begin{aligned} P \sin j &= 2b \left[\frac{s_s}{2} (h^2 - y_1^2) - \frac{s_n}{3h} (h^3 - y_1^3) \right], \\ P \cos j &= 2b \left[s_s y_1 - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{h^2} s_n \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

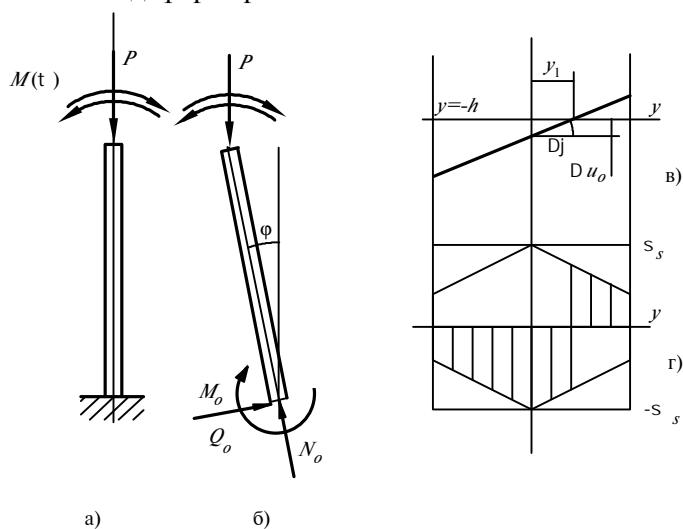


Рис. 13

Результаты решения этой системы для нескольких значений l/h при $s_u/s_s=0.6$ иллюстрируют сплошные линии на рис.14. Полученная верхняя оценка условий формоизменения не совпадает с точным решением, поскольку, как видно на рис.13б, поперечные силы и соответствующие касательные напряжения отличны от нуля, что не учитывалось в рамках принятого механизма формоизменения (22). Для получения нижней оценки параметров предельного цикла предположим, что изгибающий момент воспринимается периферийной частью сечения $|y| \geq y_1$, и касательные напряжения здесь равны нулю, а нормальная и поперечная силы воспринимаются центральной частью сечения, причем касательные напряжения распределены по ней равномерно:

$$Q_0 = P \sin j = \int_{-y_1}^{y_1} t b dy = t b \cdot 2y_1.$$

Принимая условие текучести Треска-Сен-Венана найдем предельные значения не зависящих от времени напряжений s_0 (то есть напряжения на фиктивной поверхности текучести) в центральной части сечения:

$$\left(|s_0| + s_{и} \frac{|y|}{h} \right)^2 + 4t^2 = s_s^2,$$

откуда следует, что

$$|s_0| = \sqrt{s_s^2 - \left(\frac{P \sin j}{b y_1} \right)^2} - s_{и} \frac{|y|}{h}.$$

Уравнения равновесия стержня принимают тогда вид

$$M_0 = P l \sin j = 2b \int_{y_1}^h \left(s_s - \frac{y}{h} s_{и} \right) y dy = 2b \left[\frac{s_s}{2} (h^2 - y^2) - \frac{s_{и}}{3h} (h^3 - y^3) \right],$$

$$N_0 = P \cos j = b \int_{-y_1}^{y_1} \left[\sqrt{s_s^2 - \left(\frac{P \sin j}{b y_1} \right)^2} - s_{и} \frac{|y|}{h} \right] dy =$$

$$= 2b \left[y_1 \sqrt{s_s^2 - \left(\frac{P \sin j}{b y_1} \right)^2} - \frac{y_1^2}{2h} s_{и} \right].$$

Решение этой системы иллюстрируют штриховые линии на рис.14. Вертикальной штриховкой здесь показаны области, внутри которых лежат соответствующие полные (точные) решения вариационной задачи расчета параметров предельного цикла.

При $l/h > 2$ верхняя и нижняя оценки условий прогрессирующего формоизменения различаются незначительно. Напомним, что при этом рассматривался только один механизм формоизменения, который изображен на рис.13б. На рис.14 видно, что при $j = 0$ "направление" процесса формоизменения, как уже отмечалось, не единственно. При $j > 0$ в рамках рассмотренной схемы имеет место

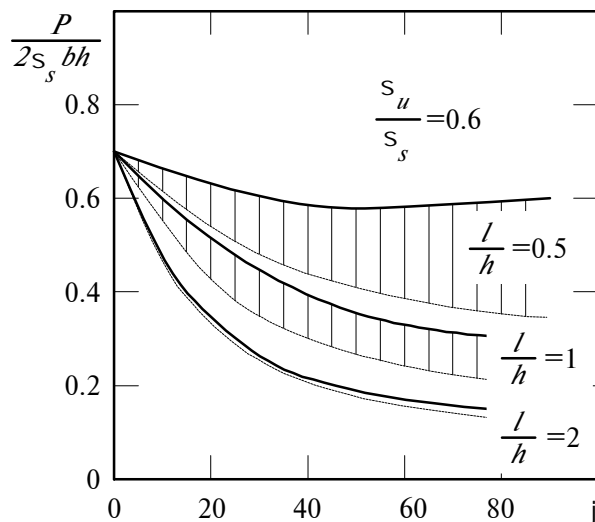


Рис. 14

геометрическое разупрочнение:

$$\frac{dj}{dP} < 0.$$

Результатам, изображенным на рис.14, можно дать и другую интерпретацию. Для стержня, у которого $l/h = 2$, наряду с уже рассмотренным механизмом формоизменения (рис.15а), возможны механизмы, изображенные на рис.15(б) и (в) жирными линиями. Очевидно, что таким механизмам будут отвечать *верхние* и *нижние* оценки параметров предельного цикла, которым соответствуют на рис.15 линии $l/h = 1$ и $l/h = 0.5$ соответственно, то есть заштрихованные области на рис.15 изображают различные возможные процессы формоизменения стержня $l/h = 2$.

Нетрудно получить аналогичные результаты для более сложных продолжений процесса, когда, например, равномерная осадка после ряда циклов сменяется изгибом стержня по схеме рис.13б, а последний - изгибом по схеме рис.15б и т.д. В итоге получим, что за пределами упругой приспособляемости направление процесса прогрессирующего формоизменения при *любой* нагрузке неустойчиво и при этом в рассмотренном случае сжатия стержня имеет место геометрическое разупрочнение.

В случае, когда нагрузка P является растягивающей, направление процесса прогрессирующего формоизменения также неустойчиво за пределами приспособляемости, но вследствие геометрического упрочнения любое конечное отклонение стержня от прямолинейной формы асимптотически (по числу циклов) исчезает в процессе прогрессирующего формоизменения.

Аналогичные выводы могут быть сделаны для цилиндрической оболочки (рис.11,12), испытывающей повторные воздействия движущейся тепловой волны.

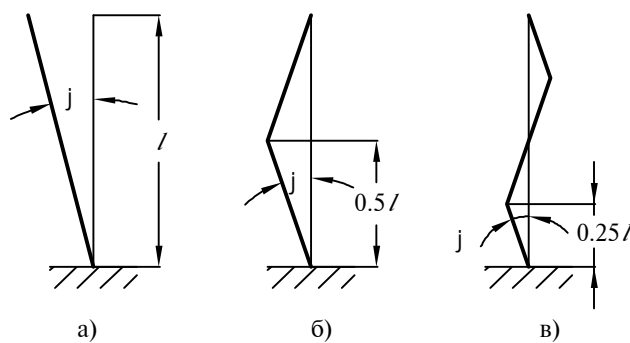


Рис. 15

Данная работа является частью проекта, выполняемого при поддержке программы INTAS-RBFR, грант 95-478

Литература

1. Гохфельд Д.А. Несущая способность конструкций в условиях теплосмен.- М.: Машиностроение, 1970.- 259с.
2. Плагов И.М., Подойников В.Г. Формоизменение колосников обжиговых машин в процессе эксплуатации. В сб.: Прочность машиностроительных конструкций при переменных нагружениях.- Челябинск: 1979.- С.92-97.
3. Gokhfeld D.A., Cherniavsky O.F. Limit analysis of structures at thermal cycling. Sijthoff and Noordhoff Jnt. Publ., Alphen aan den Rijn- The Netherlands. Rochville- USA, 1980, 537 pp.
4. Гохфельд Д.А., Харитончик А.Е. О прогрессирующем выпучивании в условиях теплосмен. В сб.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, вып.6.- Киев: Наукова думка, 1966.- С.219-226.
5. Гохфельд Д.А., Чернявский О.Ф. Несущая способность конструкций при повторных нагружениях.- М.: Машиностроение, 1979.- 263с.
6. Maier G. Shakedown matrix theory allowing for work hardening and second-order geometric effects. Jn: Foundation of Plasticity (Warsaw, 1972) Noordhoff Jnt. Publ., Leiden, 1973. p.417-434.

7. Maier G., Pan L.G., Perego U. Geometric effects on Shakedown and ratchetting of axisymmetric cylindrical shells subjected to variable thermal loads. Euromech Colloquium 298 on Inelastic Behaviour of structures under variable loads, Warsaw, IPPT, 1992.
8. Ключников В.Д. Устойчивость упруго-пластических систем.- М.: Наука, 1980.- 240с.
9. Ключников В.Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем.- М.: МГУ, 1986.- 223с.
10. Hodge Ph. G. Limit analysis of rotationally symmetric plates and shells. N-Y, Prentice Hall, 1963, 147 h.
11. Койтер В.Т. Общие теоремы упруго-пластических сред. Пер. с англ.- М.: ИЛ, 1961.- 79с.
12. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем.- М.: Машиностроение, 1978.- 311с.