Исследование внецентренного соударения двух тел, совершающих плоское движение, на основе элементарной теории удара

Ю.А.Зеленков

Рыбинская государственная авиационная технологическая академия

Решение задачи об ударе двух тел в рамках теории сплошных сред предполагает определение меняющихся в процессе развития удара полей контактных напряжений и деформаций, общей длительности соударения, сопутствующих пластических течений и волновых процессов. Более грубая элементарная теория удара позволяет определить только импульсы сил, действующих на соударяющиеся тела, и послеударное динамическое состояние рассматриваемой системы. В рамках этой теории, которая основана на понятии коэффициента восстановления, удар считается мгновенным. Элементарная теория удара обеспечивает достаточную точность и широко используется в тех технических задачах, в которых исследуется движение твердых тел без учета их упруго-напряженного состояния.

В работе [1] рассмотрена задача косого удара тела о неподвижную плоскость с учетом действия сил трения. В данной работе обобщаются результаты работы [1] на случай внецентренного соударения двух тел, совершающих плоское движение.

Момент такого соударения показан на рис. 1. Считаем, что существует плоскость, в которой расположены векторы скоростей центров масс тел (т.е. точек C и C_0), а также точка касания тел в момент удара P. Будем считать также, что векторы угловых скоростей тел перпендикулярны этой плоскости.

Разложим ударный импульс, действующий на тело 1, на две составляющие: $\bar{I}_t$ - составляющая ударного импульса, направленная вдоль общей касательной к поверхностям тел в точке контакта, $\vec{I}$ - составляющая ударного импульса, направленная вдоль нормали к общей касательной. Обозначим $\bar{I}_t'$, $\vec{I}\,'$ - аналогичные составляющие ударного импульса, действующего на тело 2. При этом для модулей импульсов имеет место $I = I'$ и $I_t = I_t'$.

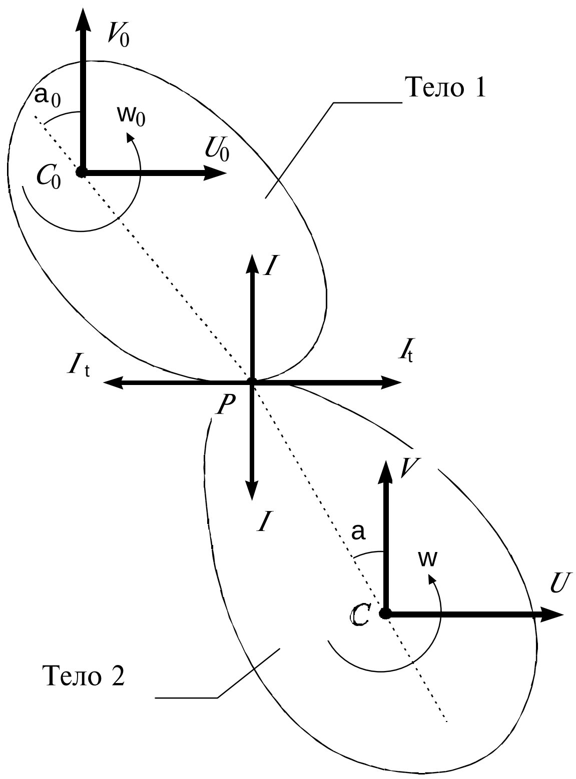

Рис. 1.

Введем также обозначения a, a_0 - углы поворота и w, w_0 - угловые скорости вращения тела 2 и тела 1 соответственно. Углы a, a_0 отсчитываются против хода часовой стрелки, положительные направления угловых скоростей показаны на рис.1.

Уравнение импульсивного движения на интервале постоянства знака скорости изменения ударной деформации и постоянства знака или равенства нулю скорости проскальзывания тел относительно друг друга имеют вид

$$
\begin{aligned}
&m_0 \Delta V_0 = I, \quad m_0 \Delta U_0 = I_\tau, \quad m_0 \rho_0^2 \Delta\omega_0 = r_0 (I \sin\alpha_0 + I_\tau \cos\alpha_0),\\
&m \Delta V = -I, \quad m \Delta U = -I_\tau, \quad m\rho^2 \Delta\omega = r(I \sin\alpha + I_\tau \cos\alpha),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где m_0, ρ_0 - масса и радиус инерции относительно центральной оси тела 1, m, ρ - масса и радиус инерции относительно центральной оси тела 2; U_0, V_0 - проекции скорости центра масс тела 1 на направления общей касательной к поверхностям тел в точке контакта и нормали к общей касательной соответственно; U, V - аналогичные проекции скорости центра масс тела 2. Знак Δ означает, что вычисляется алгебраическое изменение величин скоростей на рассматриваемом интервале. Величины $r_0 = |PC_0|$ и $r = |PC|$ являются расстояниями от центров масс тел до точки контакта при ударе.

Обозначим проекции скорости точки P тела 1 на направления общей касательной и нормали к ней переменными u_0, v_0, а соответствующие проекции скорости точки P тела 2 - переменными u, v. Тогда

$$
\begin{aligned}
&v_0 = V_0 + \omega_0 r_0 \sin\alpha_0, \quad u_0 = U_0 + \omega_0 r_0 \cos\alpha_0,\\
&v = V - \omega r \sin\alpha, \quad u = U - \omega r \cos\alpha
\end{aligned}
$$

Подставляя эти значения в уравнение (1), получаем

$$
\begin{aligned}
&m_0 \rho_0^2 \Delta v_0 = I(\rho_0^2 + r_0^2 \sin^2\alpha_0) + I_\tau r_0^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0,\\
&m_0 \rho_0^2 \Delta u_0 = I r_0^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 + I_\tau (\rho_0^2 + r_0^2 \cos^2\alpha_0),\\
&m\rho^2 \Delta v = -I(\rho^2 + r^2 \sin^2\alpha) - I_\tau r^2 \sin\alpha \cos\alpha,\\
&m\rho^2 \Delta u = -I r^2 \sin\alpha \cos\alpha - I_\tau (\rho^2 + r^2 \cos^2\alpha)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Обозначим t_- - момент соприкосновения тел, t_* - момент наибольшего сближения и t_+ - момент отрыва тел друг от друга. Может существовать три варианта внецентренного удара [1]:

- скользящий удар - скорость относительного проскальзывания внутри интервала удара не изменяется по направлению, т.е. $\operatorname{sign}(u_0 - u) = \mathrm{const}$.
- нескользящий удар первого рода - относительное проскальзывание имеет место только внутри интервала (t_-, t^*), причем момент окончания скольжения t^* принадлежит интервалу (t_*, t_+) восстановления нормальной составляющей скорости, на заключительной стадии удара при $t \in (t^*, t_+)$ имеет место равенство $u = u_0$.
- нескользящий удар второго рода - момент окончания проскальзывания t^* принадлежит интервалу увеличения ударной деформации (t_-, t_*), а при $t \in (t^*, t_+)$ выполняется $u = u_0$.

Рассмотрим каждый из трех типов удара, разбивая при этом промежуток времени соударения на участки, границами которых являются моменты времени t_-, t_*, t^*, t_+ В частности, для скользящего удара достаточно рассмотреть две фазы, на концах которых имеют место равенства

$$
\begin{aligned}
&t = t_-: \ v_0 = v_{0-};\ u_0 = u_{0-};\ \omega_0 = \omega_{0-};\ v = v_-;\ u = u_-;\ \omega = \omega_-;\\
&t = t_*: \ v_0 = v_*;\ u_0 = u_{0*};\ \omega_0 = \omega_{0*};\ v = v_*;\ u = u_*;\ \omega = \omega_*;\\
&t = t_+: \ v_0 = v_{0+};\ u_0 = u_{0+};\ \omega_0 = \omega_{0+};\ v = v_+;\ u = u_+;\ \omega = \omega_+
\end{aligned}
\tag{3}
$$

При подстановке граничных условий (3) в систему (2) получим восемь алгебраических уравнений, связывающих скорости на различных этапах удара. Недостающие для определения всех неизвестных уравнения получим из рассмотрения связи между касательным фрикционным импульсом $\vec{I}_\tau$ и нормальным реактивным импульсом $\vec{I}$

$$I_{\tau\pm} = -fI_{\pm}\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_{-})\,, \tag{4}$$

а также условия восстановления ударного импульса в соответствии с гипотезой Ньютона.

$$I_{+} = kI_{-}\,, \tag{5}$$

где I_-, $I_{\tau-}$ - нормальный и касательный импульсы на интервале увеличения ударной деформации, I_+, $I_{\tau+}$ - нормальный и касательный импульсы на интервале восстановления скорости, f - коэффициент ударного трения, k - коэффициент восстановления ударного импульса ($0\le k \le 1$).

Подставляя условия (3) в равенства (2) и с учетом соотношений (4) и (5) окончательно получим систему 8 уравнений относительно 8 неизвестных v_*, u_{0*}, u_*, v_{0+}, u_{0+}, v_+, u_+, I_-:

$$\begin{aligned}
&m_0\rho_0^2\left[v_* - v_{0-}\right] = I_-\left[P_0 - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)C_0\right],\\
&m_0\rho_0^2\left[u_{0*} - u_{0-}\right] = I_-\left[C_0 - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)D_0\right],\\
&m\rho^2\left[v_* - v_-\right] = -I_-\left[P - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)C\right],\\
&m\rho^2\left[u_* - u_-\right] = -I_-\left[C - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)D\right],\\
&m_0\rho_0^2\left[v_{0+} - v_*\right] = kI_-\left[P_0 - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)C_0\right],\\
&m_0\rho_0^2\left[u_{0+} - u_{0*}\right] = kI_-\left[C_0 - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)D_0\right],\\
&m\rho^2\left[v_+ - v_*\right] = -kI_-\left[P - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)C\right],\\
&m\rho^2\left[u_+ - u_*\right] = -kI_-\left[C - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)D\right],
\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$P_0 = \rho_0^2 + r_0^2\sin^2\alpha_0,\quad C_0 = r_0^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0,\quad D_0 = \rho_0^2 + r_0^2\cos^2\alpha_0,$$
$$P = \rho^2 + r^2\sin^2\alpha\,,\quad C = r^2\sin\alpha\cos\alpha\,,\quad D = \rho^2 + r^2\cos^2\alpha\,.$$

В случае нескользящего удара первого рода необходимо рассмотреть три фазы удара, на концах которых имеют место равенства

$$\begin{aligned}
&t = t_-:\ v_0 = v_{0-};\ u_0 = u_{0-};\ \omega_0 = \omega_{0-};\ v = v_-;\ u = u_-;\ \omega = \omega_-;\\
&t = t_*:\ v_0 = v_*;\ u_0 = u_{0*};\ \omega_0 = \omega_{0*};\ v = v_*;\ u = u_*;\ \omega = \omega_*;\\
&t = t^*:\ v_0 = v_0^*;\ u_0 = u^*;\ \omega_0 = \omega_0^*;\ v = v^*;\ u = u^*;\ \omega = \omega^*;\\
&t = t_+:\ v_0 = v_{0+};\ u_0 = u_+;\ \omega_0 = \omega_{0+};\ v = v_+;\ u = u_+;\ \omega = \omega_+.
\end{aligned} \tag{7}$$

причем касательные и нормальные импульсы на этих этапах связаны следующими соотношениями:

$$I_{\tau-} = -fI_- sign(u_{0-} - u_-)\,,\quad I_{\tau+}^{(1)} = -fI_+^{(1)} sign(u_{0-} - u_-)\,,\quad \left|I_{\tau+}^{(2)}\right| \le fI_+^{(2)} \tag{8}$$

где I_-, $I_{\tau-}$ - нормальный и касательный ударные импульсы на интервале (t_-, t_*); $I_+^{(1)}$, $I_{\tau+}^{(1)}$ - импульсы на интервале (t_*, t^*) и $I_+^{(2)}$, $I_{\tau+}^{(2)}$ - импульсы на интервале (t^*, t_+).

Гипотеза Ньютона о восстановлении ударного импульса в случае нескользящего удара 1 рода имеет вид:

$$I_+^{(1)} + I_+^{(2)} = kI_-\,. \tag{9}$$

Подстановка условий (7) в выражения (2) совместно с соотношениями для ударных импульсов (8), (9) приведет к системе уравнений относительно неизвестных v_*, u_{0*}, u_*, v_0^*, u^*, v^*, v_{0+}, v_+, u_+, $I_+^{(1)}$, $I_+^{(2)}$, $I_{\tau+}^{(2)}$, I_-:

$$
\begin{aligned}
&m_0\rho_0^2\left[v_* - v_{0-}\right] = I_-\left[P_0 - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)C_0\right],\\
&m_0\rho_0^2\left[u_{0*} - u_{0-}\right] = I_-\left[C_0 - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)D_0\right],\\
&m\rho^2\left[v_* - v_-\right] = -I_-\left[P - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)C\right],\\
&m\rho^2\left[u_* - u_-\right] = -I_-\left[C - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)D\right],\\
&m_0\rho_0^2\left[v_0^* - v_*\right] = I_+^{(1)}\left[P_0 - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)C_0\right],\\
&m_0\rho_0^2\left[u^* - u_{0*}\right] = I_+^{(1)}\left[C_0 - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)D_0\right],\\
&m\rho^2\left[v^* - v_*\right] = -I_+^{(1)}\left[P - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)C\right],\\
&m\rho^2\left[u^* - u_*\right] = -I_+^{(1)}\left[C - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)D\right],\\
&m_0\rho_0^2\left[v_{0+} - v_0^*\right] = I_+^{(2)}P_0 + I_{\tau+}^{(2)}C_0,\\
&m_0\rho_0^2\left[u_+ - u^*\right] = I_+^{(2)}C_0 + I_{\tau+}^{(2)}D_0,\\
&m\rho^2\left[v_+ - v^*\right] = -I_+^{(2)}P - I_{\tau+}^{(2)}C,\\
&m\rho^2\left[u_+ - u^*\right] = -I_+^{(2)}C - I_{\tau+}^{(2)}D,\\
&I_+^{(1)} + I_+^{(2)} = kI_-
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Аналогично, трем этапам нескользящего удара второго рода соответствуют условия:

$$
\begin{aligned}
&t = t_-: && v_0 = v_{0-}; && u_0 = u_{0-}; && \omega_0 = \omega_{0-}; && v = v_-; && u = u_-; && \omega = \omega_-;\\
&t = t^*: && v_0 = v_0^*; && u_0 = u^*; && \omega_0 = \omega_0^*; && v = v^*; && u = u^*; && \omega = \omega^*;\\
&t = t_*: && v_0 = v_*; && u_0 = u_*; && \omega_0 = \omega_{0*}; && v = v_*; && u = u_*; && \omega = \omega_*;\\
&t = t_+: && v_0 = v_{0+}; && u_0 = u_+; && \omega_0 = \omega_{0+}; && v = v_+; && u = u_+; && \omega = \omega_+
\end{aligned}
\tag{11}
$$

В этом случае необходимо рассматривать подынтервалы (t_-, t^*), (t^*, t_*), (t_*, t_+), на первом из которых связь между ударными импульсами имеет вид

$$I_{\tau-}^{(1)} = -fI_-^{(1)}\,sign(u_{0-} - u_-), \tag{12}$$

а на последующих

$$\left|I_{\tau-}^{(2)}\right| \le fI_-^{(2)},\ \left|I_{\tau+}\right| \le fI_+ \tag{13}$$

Здесь $I_-^{(1)}, I_{\tau-}^{(1)}$ - ударные импульсы на интервале (t_-, t^*); $I_-^{(2)}, I_{\tau-}^{(2)}$ - ударные импульсы на интервале (t^*, t_*); $I_+, I_{\tau+}$ - ударные импульсы на интервале (t_*, t_+). Уравнение восстановления ударного импульса в этом случае имеет вид:

$$I_+ = k(I_-^{(1)} + I_-^{(2)}) \tag{14}$$

Из выражений (2), (11),(12),(14) получим уравнения относительно неизвестных v_*, u_*, v_0^*, u^*, v^*, v_{0+}, v_+, u_+, $I_-^{(1)}$, $I_-^{(2)}$, $I_{\tau-}^{(2)}$, I_+, $I_{\tau+}$:

$$
\begin{aligned}
&m_0\rho_0^2\left[v_0^* - v_{0-}\right] = I_-^{(1)}\left[P_0 - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)C_0\right],\\
&m_0\rho_0^2\left[u^* - u_{0-}\right] = I_-^{(1)}\left[C_0 - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)D_0\right],\\
&m\rho^2\left[v^* - v_-\right] = -I_-^{(1)}\left[P - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)C\right],\\
&m\rho^2\left[u^* - u_-\right] = -I_-^{(1)}\left[C - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)D\right],\\
&m_0\rho_0^2\left[v_* - v_0^*\right] = I_-^{(2)}P_0 + I_{\tau-}^{(2)}C_0,\\
&m_0\rho_0^2\left[u_* - u^*\right] = I_-^{(2)}C_0 + I_{\tau-}^{(2)}D_0,\\
&m\rho^2\left[v_* - v^*\right] = -I_-^{(2)}P - I_{\tau-}^{(2)}C,\\
&m\rho^2\left[u_* - u^*\right] = -I_-^{(2)}C - I_{\tau-}^{(2)}D,\\
&m_0\rho_0^2\left[v_{0+} - v_*\right] = I_+P_0 + I_{\tau+}C_0,\\
&m_0\rho_0^2\left[u_+ - u_*\right] = I_+C_0 + I_{\tau+}D_0,\\
&m\rho^2\left[v_+ - v_*\right] = -I_+P - I_{\tau+}C,\\
&m\rho^2\left[u_+ - u_*\right] = -I_+C - I_{\tau+}D,\\
&I_+ = k(I_-^{(1)} + I_-^{(2)})
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Определим условия существования каждого типа удара. Из определения скользящего удара следует, что для него должно выполняться условие $\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-) = \mathrm{sign}(u_{0+} - u_+)$. Подставляя в это выражение определенные из уравнений (6) значения скоростей получим соотношение

$$\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)\cdot\mathrm{sign}(1 - (1 + k)\gamma) = \mathrm{sign}(u_{0-} - u_-),$$

где $\gamma = \dfrac{v_{0-} - v_-}{u_{0-} - u_-} \times \dfrac{Z_2}{Z_1}$,

$$Z_1 = m\rho^2 P_0 + m_0\rho_0^2 P - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)\left[m\rho^2 C_0 + m_0\rho_0^2 C\right],$$

$$Z_2 = m\rho^2 C_0 + m_0\rho_0^2 C - f\,\mathrm{sign}(u_{0-} - u_-)\left[m\rho^2 D_0 + m_0\rho_0^2 D\right].$$

Отсюда следует, что условие существования скользящего удара имеет вид $\gamma < 1/(1+k)$.

Кроме того, в данном случае должны выполнятся условия наличия соударения $I_- > 0$ и $I_+ > 0$. Найдя из системы (6) выражение для ударного импульса на первой фазе удара $I_- = -m\rho^2 m_0\rho_0^2\dfrac{v_{0-} - v_-}{Z_1}$ и подставив его в соответствующее неравенство, получим с учетом выражения (5), что оба указанных неравенства приводят к условию

$$\frac{v_{0-} - v_-}{Z_1} < 0 \tag{16}$$

Для существования нескользящего удара первого рода кроме условий наличия соударения $I_+^{(1)} > 0$, $I_+^{(2)} > 0$, $I_- > 0$ должны выполняться два условия: $\mathrm{sign}(v_0^* - v^*) \neq \mathrm{sign}(v_{0-} - v_-)$, которое вытекает из определения этого типа удара, и $\left|I_{+\tau}^{(2)}\right| \le fI_+^{(2)}$, выражающее соотношение между фрикционным и нормальным импульсом на этапе, когда скольжение прекратилось. Рассмотрим вначале второе условие. Определив из уравнений (10) значения импульсов

$$I_{+}^{(2)} = m_0\rho_0^2 m\rho^2 \frac{u_{0-}-u_-}{Z_2}\left[1-(1+k)\gamma\right],$$

$$I_{+\tau}^{(2)} = -m_0\rho_0^2 m\rho^2 Q \frac{u_{0-}-u_-}{Z_2}\left[1-(1+k)\gamma\right],$$

где $Q = \dfrac{m\rho^2 C_0 + m_0\rho_0^2 C}{m\rho^2 D_0 + m_0\rho_0^2 D}$.

найдем, что оно эквивалентно условию

$$|Q| \le f \qquad (17)$$

или

$$\left|m\rho^2 r_0^2 \sin\alpha_0\cos\alpha_0 + m_0\rho_0^2 r^2 \sin\alpha\cos\alpha\right| \le$$

$$\le f\left[m\rho^2\left(\rho_0^2 + r_0^2\cos^2\alpha_0\right) + m_0\rho_0^2\left(\rho^2 + r^2\cos^2\alpha\right)\right].$$

Используя выражения

$$I_{+}^{(1)} = -m\rho^2 m_0\rho_0^2 \frac{u_{0-}-u_-}{Z_2}\left(1-\gamma\right),\; I_- = -m\rho^2 m_0\rho_0^2 \frac{v_{0-}-v_-}{Z_1},$$

а также выражения для скоростей v_0^*, v^*, полученные из системы уравнений (10), приходим к выводу, что система неравенств, представляющих первое условие существования нескользящего удара первого рода и условия наличия соударения, эквивалентна системе, состоящей из неравенства (16), а также неравенства $1/(1+k) \le \gamma < 1$.

Для существования нескользящего удара второго рода должны выполняться три условия: $\operatorname{sign}(v_0^* - v^*) = \operatorname{sign}(v_{0-} - v_-)$, $\left|I_{\tau-}^{(2)}\right| \le fI_-^{(2)}$ и $\left|I_{\tau+}\right| \le fI_+$. Найдя из системы (15) выражения для импульсов на всех этапах удара ,

$$I_-^{(1)} = -m\rho^2 m_0\rho_0^2 \frac{u_{0-}-u_-}{Z_2},$$

$$I_-^{(2)} = m\rho^2 m_0\rho_0^2 \frac{u_{0-}-u_-}{Z_2}\left(1-\gamma\right)\frac{Z_1}{Z_3},\; I_{\tau-}^{(2)} = -QI_-^{(2)},$$

$$I_+ = m\rho^2 m_0\rho_0^2 \frac{u_{0-}-u_-}{Z_2}\left(\left(1-\gamma\right)\frac{Z_1}{Z_3}-1\right)k,\; I_{\tau+} = -QI_+,$$

где $Z_3 = m\rho^2 P_0 + m_0\rho_0^2 P - Q\left[m\rho^2 C_0 + m_0\rho_0^2 C\right]$,

получим, что второе и третье из рассматриваемых условий существования также приводятся к выражению (17). Таким образом, (17) - это необходимое условие существования нескользящего удара.

Первое условие существования нескользящего удара второго рода можно привести к неравенству $1-1/\gamma > 0$, которое имеет решения $\gamma < 0$ и $\gamma > 1$. Условия наличия соударения в этом случае имеют вид

$$I_-^{(1)} > 0,\; I_-^{(2)} > 0,\; I_+ > 0. \qquad (18)$$

При $\mathrm{g} < 0$ неравенства (18) эквивалентны системе неравенств $(v_{0-} - v_-)/Z_1 > 0$, $Z_1/Z_3 < 0$, а при $\mathrm{g} > 1$ системе $(v_{0-} - v_-)/Z_1 < 0$, $Z_1/Z_3 > 0$.

Таким образом, окончательные выражения для вычисления скоростей центров масс и угловых скоростей тел после внецентренного удара имеют вид:

при одновременном выполнении условий $\mathrm{g} < \dfrac{1}{1+k}$ и (16) имеет место скользящий удар:

$$V_{0+} = V_{0-} - (1+k)\frac{m\mathrm{r}^2\mathrm{r}_0^2}{Z_1}\mathrm{d}v,\ U_{0+} = U_{0-} + f\,\mathrm{sign}(\mathrm{d}u)(1+k)\frac{m\mathrm{r}^2\mathrm{r}_0^2}{Z_1}\mathrm{d}v,$$

$$V_+ = V_- + (1+k)\frac{m_0\mathrm{r}^2\mathrm{r}_0^2}{Z_1}\mathrm{d}v,\ U_+ = U_- - f\,\mathrm{sign}(\mathrm{d}u)(1+k)\frac{m_0\mathrm{r}^2\mathrm{r}_0^2}{Z_1}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{w}_{0+} = \mathrm{w}_{0-} - (1+k)\frac{m\mathrm{r}^2 r_0 R_0}{Z_1}\mathrm{d}v,\ \mathrm{w}_+ = \mathrm{w}_- - (1+k)\frac{m_0\mathrm{r}_0^2 rR}{Z_1}\mathrm{d}v$$

при одновременном выполнении условий $\dfrac{1}{1+k} \le \mathrm{g} \le 1$, (16), (17) имеет место нескользящий удар первого рода

$$V_{0+} = V_{0-} - (1+k)\frac{m\mathrm{r}^2\mathrm{r}_0^2}{Z_1}\mathrm{d}v,$$

$$U_{0+} = U_{0-} + Q(1+k)\frac{m\mathrm{r}^2\mathrm{r}_0^2}{Z_1}\mathrm{d}v + (f\,\mathrm{sign}(\mathrm{d}u) - Q)\frac{m\mathrm{r}^2\mathrm{r}_0^2}{Z_2}\mathrm{d}u,$$

$$\mathrm{w}_{0+} = \mathrm{w}_{0-} - (1+k)\frac{m\mathrm{r}^2 r_0 N_0}{Z_1}\mathrm{d}v + \frac{m\mathrm{r}^2 r_0(N_0 - R_0)}{Z_2}\mathrm{d}u,$$

$$V_+ = V_- + (1+k)\frac{m_0\mathrm{r}^2\mathrm{r}_0^2}{Z_1}\mathrm{d}v,$$

$$U_+ = U_- - Q(1+k)\frac{m_0\mathrm{r}^2\mathrm{r}_0^2}{Z_1}\mathrm{d}v - \left(f\,\mathrm{sign}(\mathrm{d}u) - Q\right)\frac{m_0\mathrm{r}^2\mathrm{r}_0^2}{Z_2}\mathrm{d}u,$$

$$\mathrm{w}_+ = \mathrm{w}_- - (1+k)\frac{m_0\mathrm{r}_0^2 rN}{Z_1}\mathrm{d}v + \frac{m_0\mathrm{r}_0^2 r(N-R)}{Z_2}\mathrm{d}u$$

при одновременном выполнении условий $\mathrm{g} > 1$, $Z_1/Z_3 > 0$,(16), (17) или условий $\mathrm{g} < 0$, $\dfrac{v_{0-} - v_-}{Z_1} > 0$, $Z_1/Z_3 < 0$, (17) имеет место нескользящий удар второго рода

$$V_{0+} = V_{0-} - (1+k)\frac{m\mathrm{r}^2\mathrm{r}_0^2}{Z_3}\mathrm{d}v - \left(f sign(\mathrm{d}u) - Q\right)(1+k)\frac{m\mathrm{r}^2\mathrm{r}_0^2 Z_4}{Z_2 Z_3}\mathrm{d}u,$$

$$U_{0+} = U_{0-} + Q(1+k)\frac{m\mathrm{r}^2\mathrm{r}_0^2}{Z_3}\mathrm{d}v + \\ + (f\,\mathrm{sign}(\mathrm{d}u) - Q)\frac{m\mathrm{r}^2\mathrm{r}_0^2}{Z_2}\left[1 + Q(1+k)\frac{Z_4}{Z_3}\right]\mathrm{d}u,$$

$$\omega_{0+} = \omega_{0-} - (1+k)\frac{m\rho^2 r_0 N_0}{Z_3}\mathrm{d}v + \frac{m\rho^2 r_0}{Z_2}\left[(1+k)\frac{N_0 Z_1}{Z_3} - (N_0 + kR_0)\right]\mathrm{d}u,$$

$$V_+ = V_- + (1+k)\frac{m_0\rho^2\rho_0^2}{Z_3}\mathrm{d}v + \left(f\,\mathrm{sign}(\mathrm{d}u) - Q\right)(1+k)\frac{m_0\rho^2\rho_0^2 Z_4}{Z_2 Z_3}\mathrm{d}u,$$

$$U_+ = U_- - Q(1+k)\frac{m_0\rho^2\rho_0^2}{Z_3}\mathrm{d}v - \left(f\,\mathrm{sign}(\mathrm{d}u) - Q\right)\frac{m_0\rho^2\rho_0^2}{Z_2}\left[1 + Q(1+k)\frac{Z_4}{Z_3}\right]\mathrm{d}u,$$

$$\omega_+ = \omega_- - (1+k)\frac{m_0\rho_0^2 rN}{Z_3}\mathrm{d}v + \frac{m_0\rho_0^2 r}{Z_2}\left[(1+k)\frac{NZ_1}{Z_3} - (N + kR)\right]\mathrm{d}u,$$

где

$Z_4 = m\rho^2 C_0 + m_0\rho_0^2 C$, $R_0 = \sin\alpha_0 - f\,\mathrm{sign}(\mathrm{d}u)\cos\alpha_0$,

$R = \sin\alpha - f\,\mathrm{sign}(\mathrm{d}u)\cos\alpha$, $N_0 = \sin\alpha_0 - Q\cos\alpha_0$, $N = \sin\alpha - Q\cos\alpha$,

$\mathrm{d}v = \left(V_{0-} - V_-\right) + \left(\omega_{0-} r_0 \sin\alpha_0 + \omega_- r\sin\alpha\right)$,

$\mathrm{d}u = \left(U_{0-} - U_-\right) + \left(\omega_{0-} r_0 \cos\alpha_0 + \omega_- r\cos\alpha\right)$.

Литература

1. Нагаев Р.Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985.-200 с.