

Обобщенная модель неупругой конструкции

В.Н. Мадудин

Челябинский государственный технический университет

Оценка прочности элементов конструкций, подверженных повторно-переменному нагружению и теплосменам, должна базироваться на анализе актуальных предельных состояний с учетом пластичности, ползучести, их взаимного влияния, особенностей неизотермического и непропорционального нагружения.

Традиционно модели неупругих конструкций строятся на основе статических, геометрических уравнений, а также теорий пластичности и ползучести, отображающих деформационные свойства материала изделия. По этой схеме построены достаточно адекватные модели [1...4] для анализа кинетики неупругого деформирования, базирующиеся на методе конечных элементов и структурной модели упруго-вязко-пластической среды. Последняя, имитируя микронеоднородность реальных материалов, описывает большинство эффектов, объединенных термином деформационная анизотропия [5]. Широкому внедрению описанных моделей в практику расчетов неупругих конструкций препятствует их высокая трудоемкость. Перспективными являются альтернативные подходы, когда уравнения, описывающие неупругую конструкцию, записываются в обобщенных переменных - силах, перемещениях - и связывают непосредственно параметры внешнего воздействия с реакцией конструкции, минуя детальный анализ напряженно-деформированного состояния. Большинство известных обобщенных моделей [6...9] ориентировано на описание ползучести элементов конструкций. В настоящей работе предлагается обобщенная реологическая модель конструкции, предназначенная для анализа циклической пластичности и ползучести.

1. Определяющие уравнения обобщенной реологической модели

Введем обозначения: \vec{Q} - вектор обобщенной нагрузки, \vec{u} - вектор обобщенного перемещения в пространстве обобщенных параметров (m - число обобщенных переменных)

$$\vec{Q} = Q_j \vec{e}_j, \quad \vec{u} = u_j \vec{e}_j, \quad j = 1..m. \quad (1)$$

Примем, что конструкция состоит из одинаково деформирующихся статически определимых подконструкций (n - число подконструкций)

$$\vec{u} = \vec{u}_e + \vec{u}_p = \vec{u}_e^k + \vec{u}_p^k, \quad k = 1..n. \quad (2)$$

Обратимая часть обобщенного перемещения подконструкции \vec{u}_e^k линейно связана с обобщенной силой \vec{Q}^k

$$\vec{u}_e^k = \vec{\Lambda} \cdot \vec{Q}^k, \quad (3)$$

где $\vec{\Lambda}$ - одинаковый для всех подконструкций тензор упругих постоянных

$$\vec{\Lambda} = \sum_{k=1}^n \lambda_j \vec{E}_j \quad (4)$$

(в свою очередь, $\vec{\vec{E}}_j = \vec{e}_j \vec{e}_j$), точкой обозначено скалярное произведение.

Необратимую часть обобщенного перемещения \vec{u}_p^k разделим на реономную и склерономную части

$$\vec{u}_p^k = \vec{u}_c^k + \vec{u}_b^k. \quad (5)$$

Реономная составляющая определяется скоростью \vec{u}_c^k

$$\dot{\vec{u}}_c^k = \frac{\vec{\vec{R}}^k \cdot \vec{Q}^k}{|\vec{\vec{R}}^k \cdot \vec{Q}^k|} \Phi^k(|\vec{Q}_1^k|, |\vec{Q}_2^k|, \dots, |\vec{Q}_m^k|, T), \quad (6)$$

здесь $\vec{\vec{R}}^k$ - тензор, отражающий анизотропию свойств подконструкций в пространстве обобщенных параметров, T - температура.

В простейшем случае считаем $\vec{\vec{R}}^k$ соосными $\vec{\vec{\Lambda}}^k$ и в главных осях равными

$$\vec{\vec{R}}^k = \sum_{j=1}^m h_j^k \vec{e}_j \vec{e}_j, \quad (7)$$

Определение функций $\Phi^k()$ как функций многих переменных затруднит использование модели в приложениях. Примем следующее ограничение - будем считать функции $\Phi^k()$ одинаковыми для всех подконструкций $\Phi^k() = \Phi()$, а различие реологических свойств подконструкций регламентируем параметрами Z^k

$$\dot{\vec{u}}_c^k = \frac{\vec{\vec{R}}^k \cdot \vec{Q}^k}{|\vec{\vec{R}}^k \cdot \vec{Q}^k|} \Phi\left(\frac{Q_o^k}{z^k}, T\right), \quad (8)$$

где $Q_o^k = \sqrt{\vec{Q}^k \cdot \vec{\vec{R}}^k \cdot \vec{Q}^k}$ - эквивалентная нагрузка, Z^k - параметры подконструкций.

Склерономная составляющая необратимого перемещения \vec{u}_b^k определяется из условия пластичности:

$$\vec{Q}^k \cdot \vec{\vec{R}}^k \cdot \vec{Q}^k = (Q_0^k)^2, \quad (9)$$

где $Q_0^k = z^k Q_o$, Q_o - параметр модели, имеющий смысл предельной нагрузки.

Обобщенные переменные конструкции \vec{Q} , \vec{u}_e , \vec{u}_c , \vec{u}_b , \vec{u}_p и скорости их изменения определяются осреднением соответствующих параметров подконструкций, например,

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n g^k \vec{Q}^k, \quad \vec{u}_p = \sum_{k=1}^n g^k \vec{u}_p, \quad (10)$$

где g^k "весовые" доли подконструкций.

Модель конструкции будет полностью определена, когда будут заданы параметры Q_0 , z^k , g^k , l_j , h_j^k и функция $\Phi()$. Для идентификации модели достаточно знать кривые деформирования в координатах "обобщенная сила - обобщенное перемещение" и кривые ползучести - зависимость обобщенного перемещения от времени при постоянной обобщенной силе (для каждой температуры). Эта информация может быть получена в процессе физического или численного эксперимента (например, путем анализа кинетики напряженно-деформированного состояния конечно-элементной модели конструкции). Методика нахождения параметров обобщенной модели конструкции вполне аналогична методу построения структурной модели среды [1].

2. Техника использования модели

Алгоритм расчета кинетики неупругого деформирования с использованием обобщенной модели конструкции основывается на интегрировании уравнений (1)..(10).

В простейшем случае может быть использован метод Эйлера: история нагружения разбивается на малые интервалы времени Δt - шаги, в каждом шаге скорость изменения реономной части необратимого перемещения подконструкции $\dot{\vec{u}}_c^k$ считается постоянной - соответствующее приращение $\Delta \vec{u}_c^k = \dot{\vec{u}}_c^k \cdot \Delta t$, для определения приращений склерономной составляющей $\Delta \vec{u}_b^k$ необходимо прибегать к последовательным приближениям.

Рассмотрим технику определения $\Delta \vec{u}_b^k$ за один временной интервал $\Delta t = t_2 - t_1$ (t_1, t_2 - начало и конец интервала соответственно).

Запишем соотношение (2) для момента времени t_2

$$\vec{u}_2 = \vec{u}_e + \vec{u}_p = \vec{u}_e + (\vec{u}_p + \Delta \vec{u}_p) = \vec{u}_e + (\vec{u}_p + \Delta \vec{u}_c + \Delta \vec{u}_b),$$

обозначим $\vec{u}_p = (\vec{u}_p + \Delta \vec{u}_c)$, тогда

$$\vec{u}_2 = \vec{u}_e + \vec{u}_p + \Delta \vec{u}_b. \quad (11)$$

Здесь все величины кроме $\Delta \vec{u}_b$ известны. Аналогичные соотношения имеют место для подконструкций.

Обозначим сумму $\vec{u}_e^k + \Delta\vec{u}_b$ через \vec{u}_{ef}^k , тогда

$$\vec{u}_2 = \vec{u}_{ef}^k + \vec{u}_{p10}^k, \quad (12)$$

наконец, с учетом (11), получим

$$\vec{u}_{ef}^k = \vec{u}_e^k + \vec{u}_{p10}^k + \Delta\vec{u}_b - \vec{u}_{p10}^k. \quad (13)$$

Полученные соотношения вместе с условием пластичности (9), а также очевидными равенствами

$$\vec{Q}^k = \vec{\Lambda}^{-1} \cdot \vec{u}_e^k = \vec{\Lambda}^{-1} \cdot (\vec{u}_{ef}^k - \Delta\vec{u}_b^k), \quad (14)$$

$$\Delta\vec{u}_b^k = \vec{n}^k \left| \Delta\vec{u}_b^k \right|, \quad (15)$$

где \vec{V}^k - единичный вектор нормали к поверхности текучести, представляют уравнения для определения $\Delta\vec{u}_b^k$.

Таким образом, определению подлежат: \vec{V}^k - вектор и $\left| \Delta\vec{u}_b^k \right|$ - скаляр. Если \vec{R}^k - шаровой тензор, то решение тривиально; однако, в общем случае возникает задача построения нормали к m -мерному эллипсоиду. Одно из возможных решений следующее (см. рис. 1) - в каждой итерации в качестве очередного приближения к \vec{V}^k используем

$$\vec{n}^k = \frac{\vec{R}^k \cdot \vec{\Lambda} \cdot \vec{u}_{ef}^k}{\left| \vec{R}^k \cdot \vec{\Lambda} \cdot \vec{u}_{ef}^k \right|} \quad (16)$$

тогда для определения приближения $\left| \Delta\vec{u}_b^k \right|$ достаточно решить уравнение

$$a \left| \Delta\vec{u}_b^k \right|^2 + b \left| \Delta\vec{u}_b^k \right| + g = 0, \quad (17)$$

$$\text{где } a = \sum_{j=1}^m (c_j m_j^k h_j^k)^2, \quad b = - \sum_{j=1}^m 2c_j^2 m_j^k (h_j^k)^2 u_{efj}^k, \quad g = \sum_{j=1}^m (c_j h_j^k u_{efj}^k)^2.$$

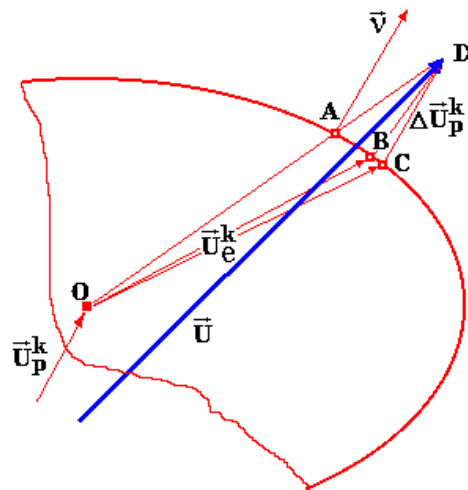


Рис. 1. Схема определения приращения необратимого перемещения

3. Оценка адекватности структурной модели конструкции

Оценить адекватность предложенной модели конструкции можно путем сопоставления ее реакции на типовые воздействия с экспериментом, либо - что технически проще - с реакцией более точной (и как правило, более трудоемкой для анализа), например, конечно-элементной модели. В настоящей работе для этой цели использовано специально разработанное программное обеспечение: пакет прикладных программ для конечно-элементного анализа напряженно-деформированного состояния неупругих конструкций и вычислительная программа исследования кинетики неупругого деформирования конструкций, построенная на базе обобщенной реологической модели конструкции.

Сопоставление петель упруго-вязко-пластического гистерезиса в зоне концентрации напряжений (см. рис. 2), рассчитанных методом конечных элементов (в качестве физических уравнений использована структурная модель реономной среды) и путем интегрирования уравнений обобщенной модели конструкции, свидетельствует о приемлемой для инженерных приложений точности. В качестве обобщенных переменных в данном случае принимались: напряжение в идеально упругой детали с концентратором напряжений $Q = a_s q$ (a_s - теоретический коэффициент концентрации напряжений, q - внешняя нагрузка) и полная деформация в опасной

точке $u = \epsilon_{\max}$. При определении параметров модели конструкции использовались диаграммы деформирования, полученные методом Нейбера с применением формулы

$$se^{\frac{a_s-1}{2}} = const$$
; реологическая функция отождествлялась с соответствующей функцией структурной модели материала. Расчет кинетики деформирования выполнялся в следующей последовательности: в каждом шаге по заданной обобщенной нагрузке определялось обобщенное перемещение - вариант расчета силового нагружения, а затем (в силу $u = \epsilon_{\max}$) по известной деформации - напряжение в зоне концентрации - расчет кинематического воздействия в соответствии с моделью материала.

На рис. 3 приведено сопоставление петель упруго-вязко-пластического гистерезиса в диске компрессора авиационного двигателя, рассчитанных с использованием конечно-элементной и обобщенной моделей. В качестве обобщенной нагрузки в данном случае принималось окружное напряжение в идеально упругом диске

(на внутренней поверхности ступицы) $Q = S_j^{(e)}$, а в качестве обобщенного

перемещения - полная окружная деформация $u = \epsilon_j$ в той же точке реального диска. Обобщенная модель идентифицировалась кривыми деформирования и ползучести, рассчитанными методом конечных элементов.

Отметим, что в рассмотренных примерах затраты времени на расчет, выполненный с привлечением обобщенной модели конструкции, в сотни раз меньше, чем методом конечных элементов. Вместе с тем, достигнута удовлетворительная для приложений точность.

4. Область применения модели

Реакцию конструкции на повторно-переменное нагружение целесообразно разделить на циклическую и статическую составляющие. Анализ процессов накопления односторонних деформаций (формоизменения) в элементах конструкций показывает, что такое накопление может происходить путем реализации следующих трех механизмов деформирования:

- неизохронное пластическое или вязкое течение глобально охватывающее за цикл нагружения деталь и приводящее к совместным приростам деформаций;
- накопление деформаций вследствие явления циклической ползучести, реализующегося при циклическом нагружении даже при нормальных температурах;
- накопление деформаций, обусловленное эффектами непропорционального нагружения.

Предлагаемая структурная модель неупругой конструкции не может претендовать на универсальное описание накопления деформаций, так как не отражает первый из упомянутых выше механизмов формоизменения. В связи с этим область применения модели ограничивается расчетом циклической реакции конструкции на внешнее воздействие, которая служит основой для оценки усталостного малоциклового повреждения. Для расчета на малоцикловую усталость достаточно в качестве одного из обобщенных перемещений принять деформацию в опасной точке конструкции и после определения истории изменения деформации применить модель малоциклового прочностного ресурса.

С использованием разработанной обобщенной модели может быть расширена область применения методов расчета кинетики неупругого деформирования - становится возможным выполнение вариантных расчетов неупругих деформаций элементов конструкций, оценка остаточного ресурса и программирование ускоренных испытаний применительно к объектам энергетики, металлургии, транспортного турбостроения, а также расчет деформирования и накопления повреждений в процессе эксплуатации в соответствии с реальной программой нагружения деталей (счетчик ресурса по типу [14]).

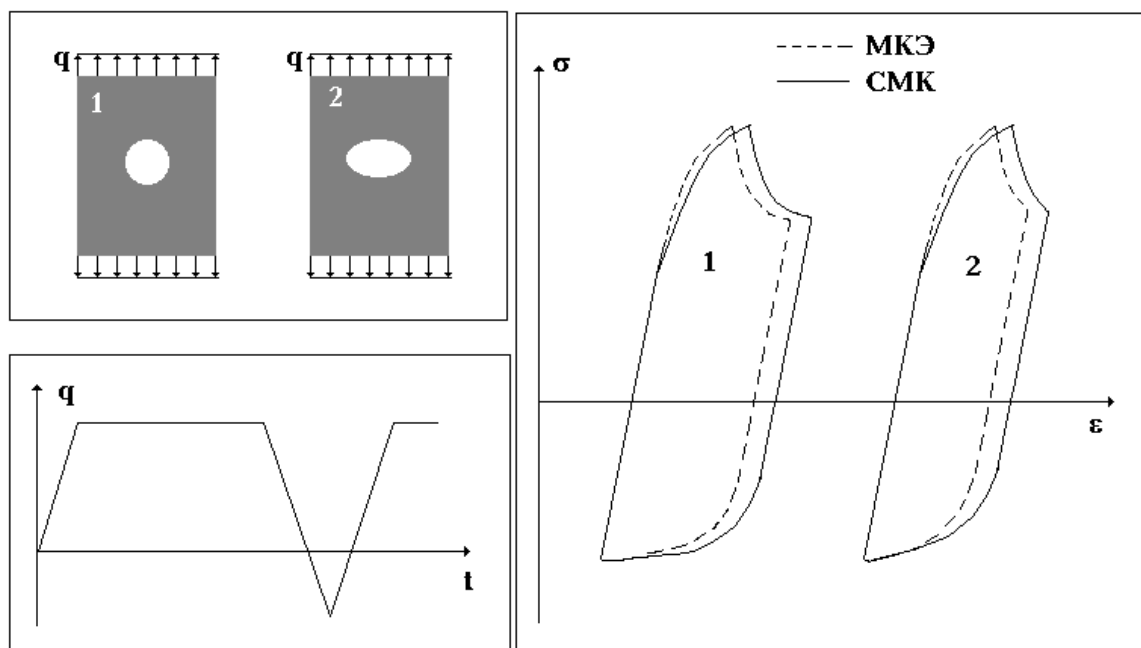


Рис. 2. Петли упруго-вязко-пластического гистерезиса в зоне концентрации напряжений

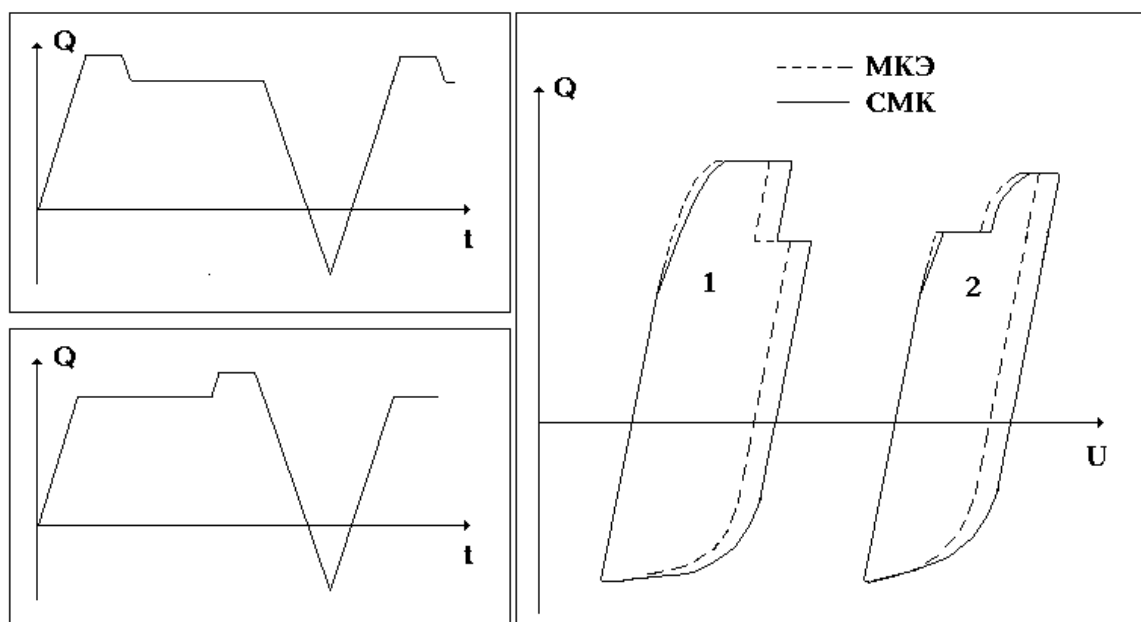


Рис. 3. Оценка адекватности модели диска компрессора авиационного газотурбинного двигателя

Литература

1. Гохфельд Д.А., Садаков О.С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях// М.: Машиностроение, 1984. - 256 с.
2. Мадудин В.Н., Садаков О.С. Модификация метода конечных элементов применительно к расчету неупругого деформирования конструкций. - В кн. Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: ГГУ, 1982. - Вып. 20, с.24-29.
3. Мадудин В.Н. Моделирование неупругих деформаций в анизотропных охлаждаемых лопатках газовых турбин// Прочность машин и аппаратов при переменных нагружениях: Тематический сборник научных трудов. - Челябинск: ЧГТУ, 1991. - с.97-105.
4. Кульчихин Е.Т., Мадудин В.Н. Оценка адекватности подхода Нейбера для расчета неупругих деформаций в зонах концентрации напряжений// Прочность машин и аппаратов при переменных нагружениях: Тематический сборник научных трудов/ Под ред. О.Ф.Чернявского. - Челябинск: ЧПИ, 1989. - с.12-17.
5. Реологические модели микронеоднородных сред/ Апайчев М.В., Гохфельд Д.А., Мадудин В.Н., Садаков О.С.// Новожиловский сборник. СПб.: Судостроение, 1992. с.135-142.
6. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.-752 с.
7. Стасенко И.В. Расчет трубопроводов на ползучесть. М.: Машиностроение, 1986. - 256 с.
8. Теоретико-экспериментальный метод исследования ползучести в конструкциях. - Сб. научн. трудов, КПТИ, Куйбышев, 1984.
9. Клебанов Я.М. Обобщенная модель ползучести конструкций при сложном нагружении. - Известия вузов "Машиностроение", №6, 1988.
10. Мадудин В.Н. Малопараметрические модели неупругих конструкций: опыт построения// Прочность машин и аппаратов при переменных нагружениях: Тематический сборник научных трудов. - Челябинск: ЧГТУ, 1991. - с.16-20.
11. Мадудин В.Н., Соляников В.А. Обобщенные переменные в расчетах кинетики неупругого деформирования конструкций// Прочность машин и аппаратов при переменных нагружениях: Тематический сборник научных трудов/ Под ред. Д.А.Гохфельда и О.С.Садакова. - Челябинск: ЧПИ, 1989. - с. 5-8.
12. Мадудин В.Н., Панихицина Л.А. Структурная модель неупругой конструкции// Проблемы повышения прочности элементов машиностроительных конструкций: Тезисы докладов VIII Межреспубл. конф. -Пермь: Перм. политехн. ин-т, 1990. - с.44.
13. Sadakov O.S., Madudin V.N., Apaichev M.V. On the state equations for anisotropic elasto-visco-plastic bodies. 4-th IUTAM Symposium "Creep in Structures". Krakow, Poland, Sept. 1990. - Abstracts - pp.130-131.
14. Мадудин В.Н., Панихицина Л.А., Садаков О.С. Разработка счетчика накопления малоцикловых повреждений// Конструкционная прочность двигателей: Тезисы докладов XII Всес. научн.-техн. конф., Куйбышев: Куйбыш. политехн. ин-т, 1990. - с.98-99.